

# Физические явления в детеминированных аperiодических структурах

Семинар лаборатории Алешина, ФТИ

27 января 2025 г. Санкт-Петербург

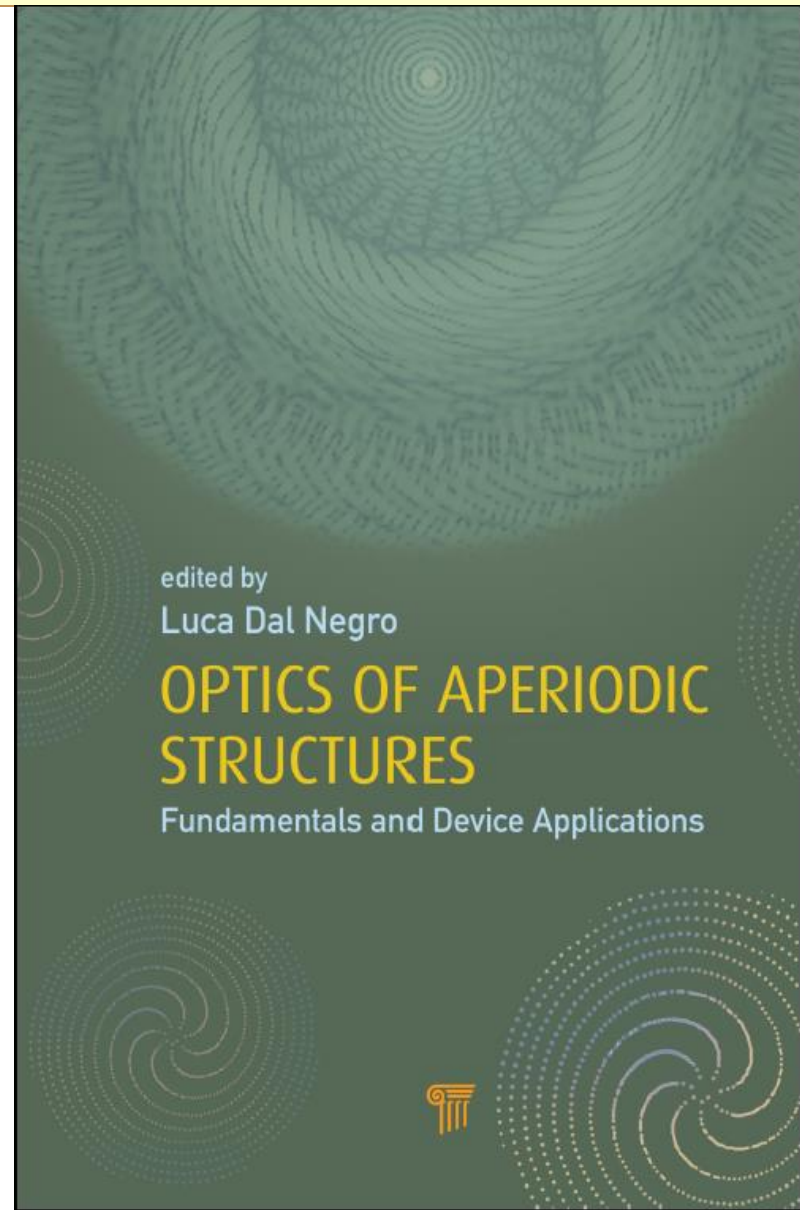


**Мадисон  
Алексей Евгеньевич**

**к.ф.-м.н., доцент**

# Перспективные направления

Оптические фильтры на основе многослойных аперiodических структур (последовательности Фибоначчи, Тью-Морзе, Рудина-Шапиро), концентраторы для сверхтонких фотовольтаических элементов на основе спирально расположенных массивов точек, аперiodические структуры на основе распределения нетривиальных нулей дзета-функции Римана



# Теория аperiodических структур

## Изучение структуры икосаэдрических квазикристаллов

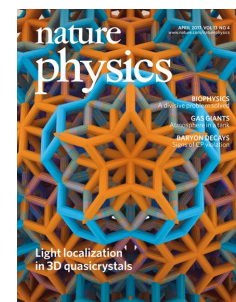
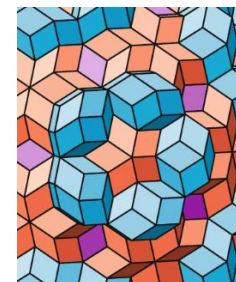
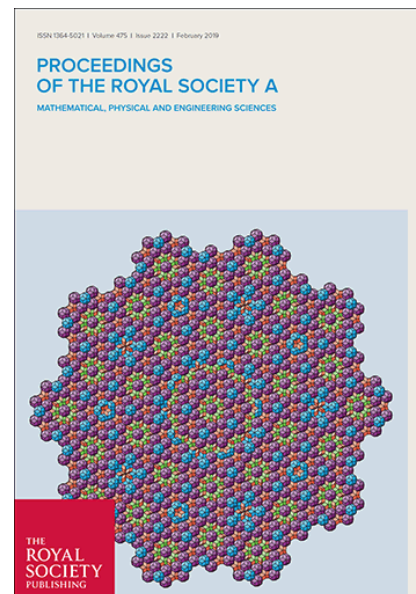
- ◆ Разработана теория для описания структуры икосаэдрических квазикристаллов без привлечения методов многомерной кристаллографии.
- ◆ Результаты украсили обложку журнала "Proceedings of the Royal Society A".
- ◆ Результаты процитированы в журнале "Nature Physics".

A.E. Madison // RSC Adv., 2015, **5**, 5745-5753.

A.E. Madison // RSC Adv., 2015, **5**, 79279-79297.

A.E. Madison, P.A. Madison // Proc. Royal Soc. A, 2019, **475**, #20180667.

A.E. Madison, P.A. Madison // Struct. Chem., 2020, **31**, 485-505.



## Изучение симметрии подобия и криволинейной симметрии

- ◆ Результаты украсили обложку журнала "Structural Chemistry".

A.E. Madison // ФТТ, 2013, **55**, 784-796.

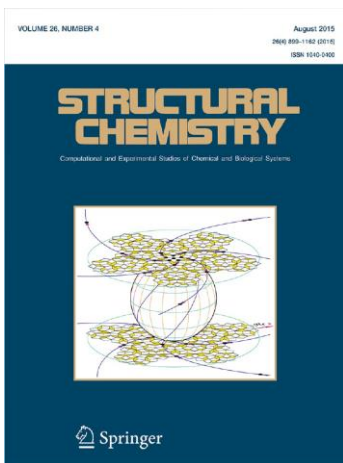
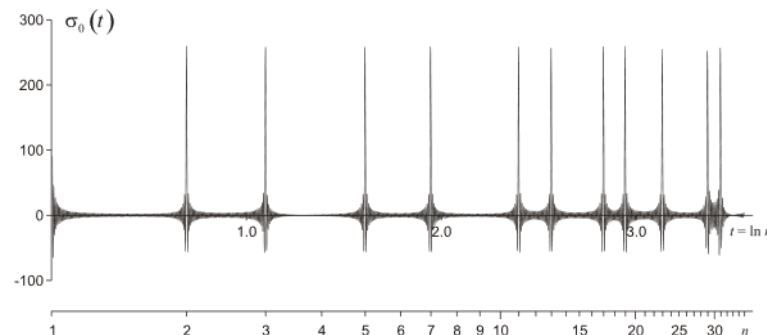
A.E. Madison // ФТТ, 2014, **56**, 1651-1661.

A.E. Madison // Struct. Chem., 2015, **26**, 923-942.

## Исследование спектров аperiodических структур, упорядоченных в соответствии с расположением нулей $\zeta$ -функции Римана

- ◆ Получен спектр с пиками, расположенными в соответствии с простыми числами.

A.E. Madison, P.A. Madison, S.V. Kozyrev. // Struct. Chem., 2022, DOI: 10.1007/s11224-022-01906-2.

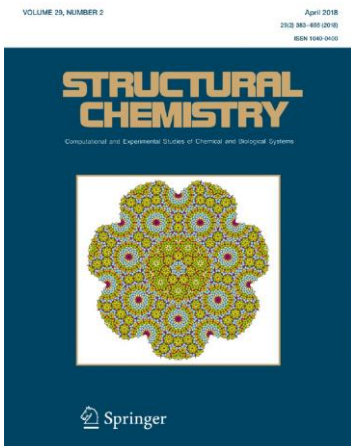


## Изучение аperiodических разбиений с симметрией 7-ого порядка

- ◆ Получены разбиения с симметрией 7-ого порядка.
- ◆ Результаты украсили обложку журнала "Structural Chemistry".
- ◆ Одно из разбиений внесено в «Энциклопедию разбиений» университета г. Билефельд под названием Madison's 7-fold tiling.

A.E. Madison // Struct. Chem., 2017, **28**, 57-62.

A.E. Madison // Struct. Chem., 2018, **29**, 645-655.



# Nature milestones in crystallography

## века 20: Открытие квазикристаллов



Dan Shechtman



Alan Mackay



Paul Steinhardt



2011

экспериментальное  
открытие,  
1982, опубл. 1984

расчет дифракционной  
картины от паркета  
Пенроуза, предсказание  
квазикристаллов,  
1982

теоретическое  
объяснение,  
1986

Paul J. Steinhardt

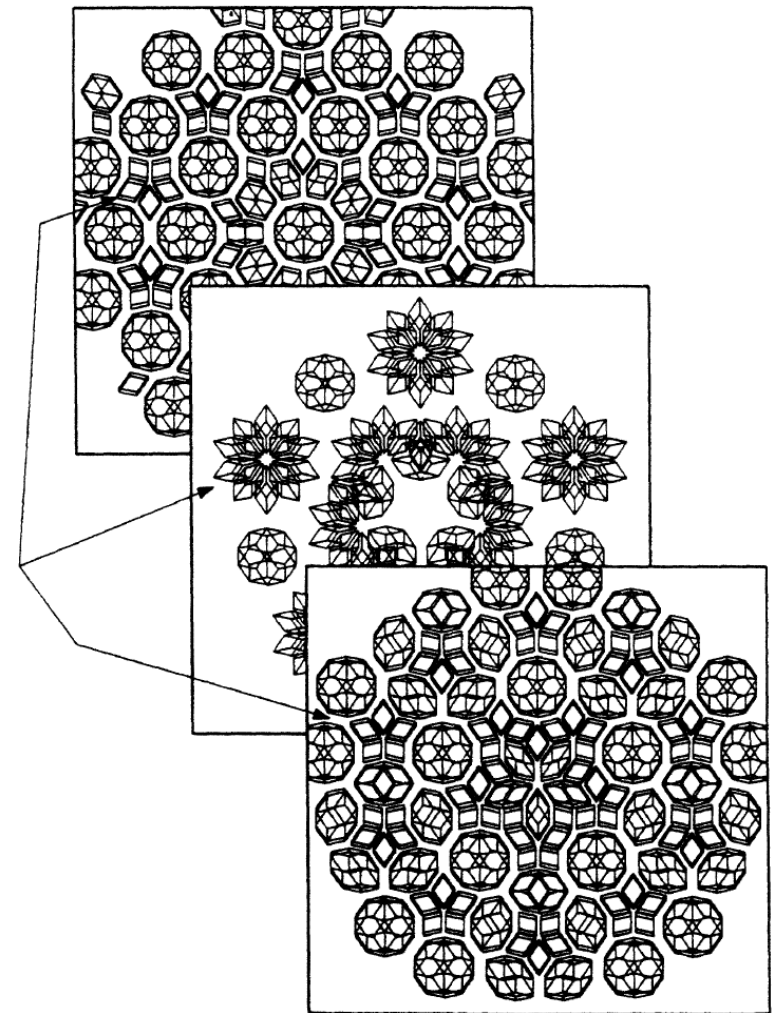
## Quasicrystals: A New Class of Ordered Structures, 1984

### Quasicrystals I, Quasicrystals II, 1986

1. Упаковки содержат 4 типа элементарных ячеек: триаконтаэдр, ромбический икосаэдр, ромбический додекаэдр, «золотой» ромбоэдр.

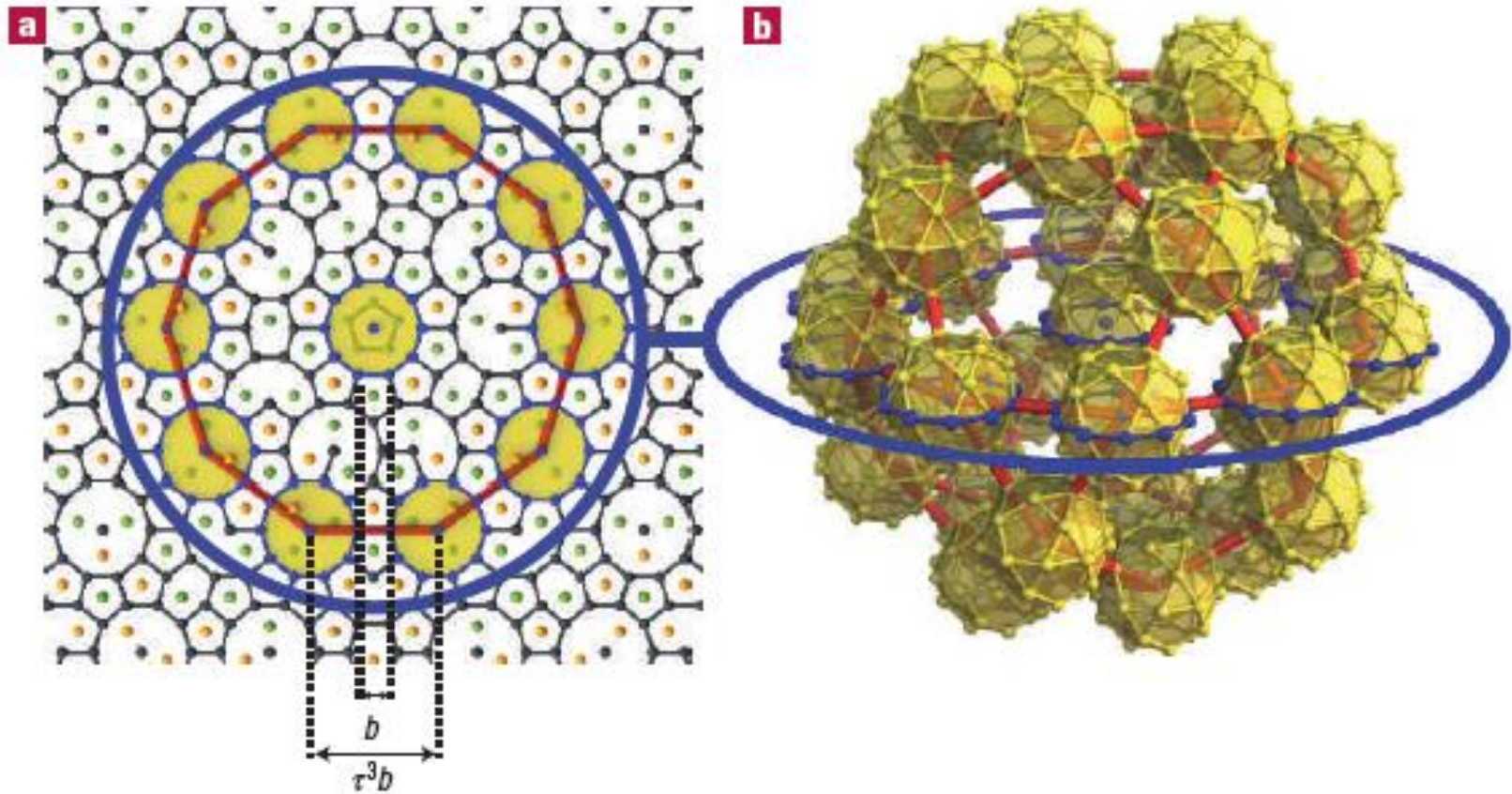
2. Существует 3 упаковки с икосаэдрической симметрией. Одна из них в центре имеет триаконтаэдр, а следующий слой образуют 30 ромбических додекаэдров. Две другие в центре имеют звезду ромбоэдров, а следующий слой для одной из них образуют 12 икосаэдров, а для другой – 12 триаконтаэдров.

3. Упаковки обладают свойством гомогенности наподобие разбиения Пенроуза.



# Atomic structure of the binary icosahedral Yb–Cd quasicrystal

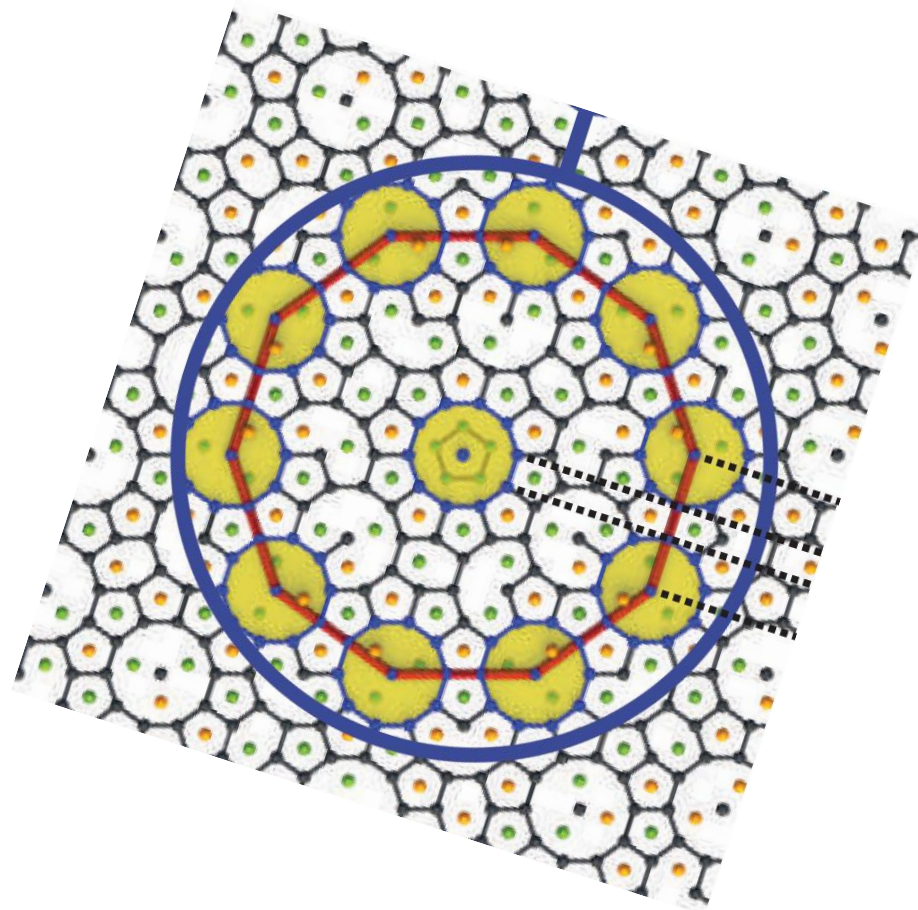
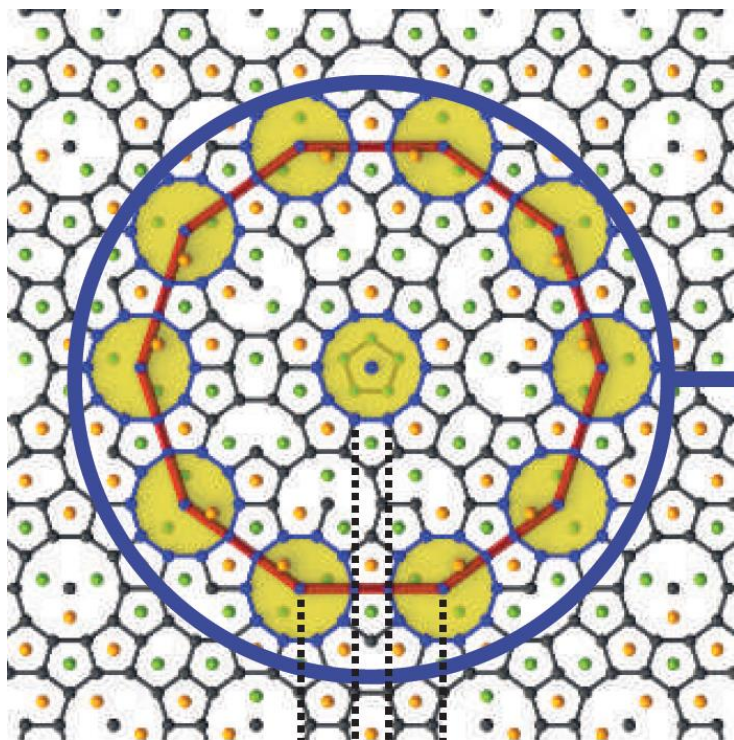
HIROYUKI TAKAKURA<sup>1,2\*</sup>, CESAR PAY GÓMEZ<sup>3</sup>, AKIJI YAMAMOTO<sup>2,4</sup>, MARC DE BOISSIEU<sup>5</sup>  
AND AN PANG TSAI<sup>2,3</sup>



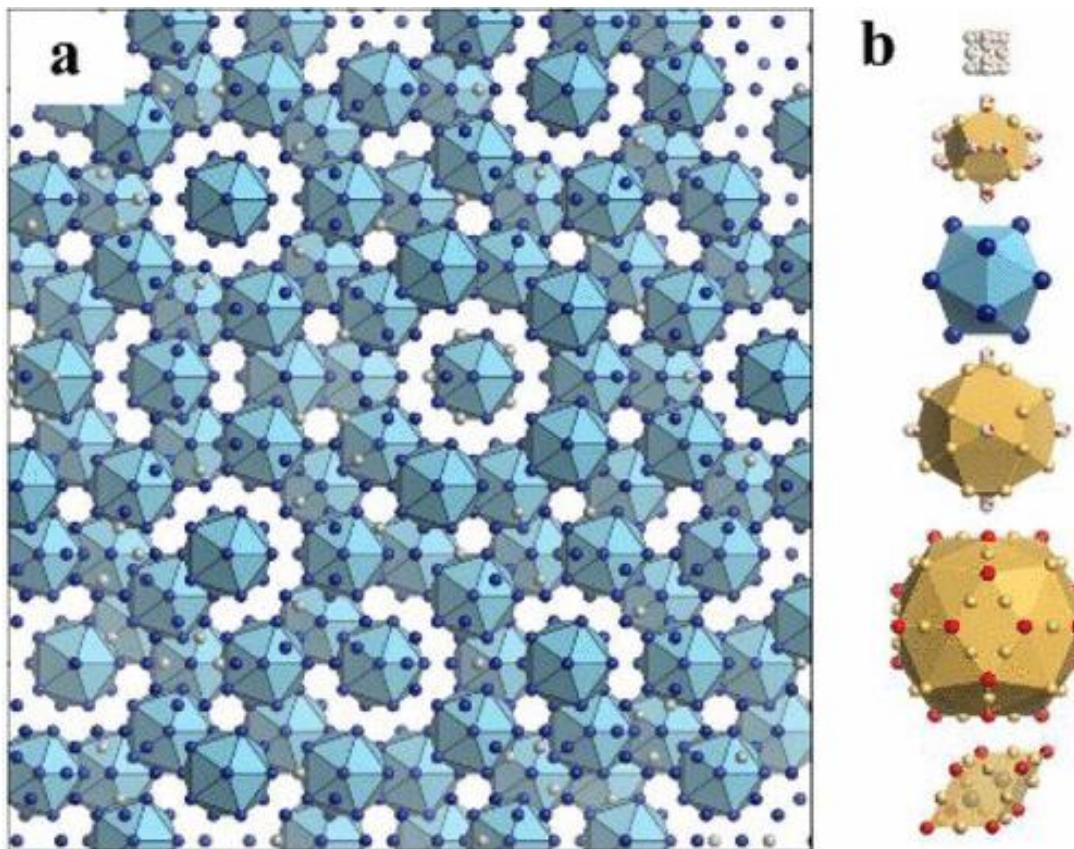
**Figure 5** Inflation properties of the  $i\text{-YbCd}_{5,7}$  QC. **a**, A dense plane of RTH units is seen along the five-fold axis. Only the centres of the RTH units are shown as coloured spheres. The dense plane is slightly puckered; the orange spheres are above the ideal plane, green spheres are below and dark grey (and blue) spheres are in the plane.

// *Nature Materials* (2007) 6: 58-63.

# Модель кластеров Tsai



# Модель кластеров Tsai



**J | A | C | S**  
JOURNAL OF THE AMERICAN CHEMICAL SOCIETY

[pubs.acs.org/JACS](https://pubs.acs.org/JACS)



Article

## Experimental Observation of Long-Range Magnetic Order in Icosahedral Quasicrystals

Ryuji Tamura,\* Asuka Ishikawa, Shintaro Suzuki, Takahiro Kotajima, Yujiro Tanaka, Takehito Seki, Naoya Shibata, Tsunetomo Yamada, Takenori Fujii, Chin-Wei Wang, Maxim Avdeev, Kazuhiro Nawa, Daisuke Okuyama, and Taku J. Sato\*



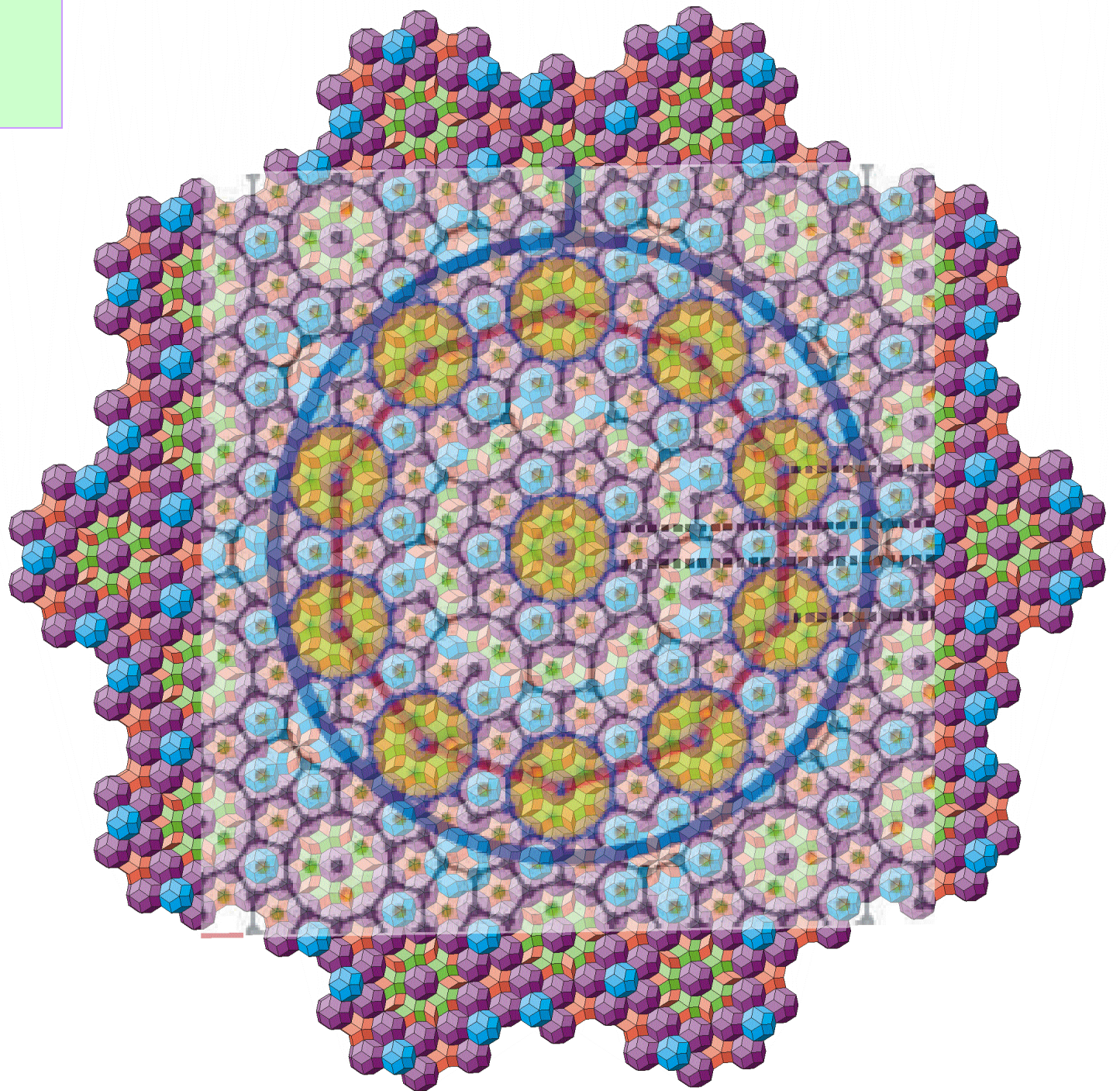
Cite This: *J. Am. Chem. Soc.* 2021, 143, 19938–19944



Read Online



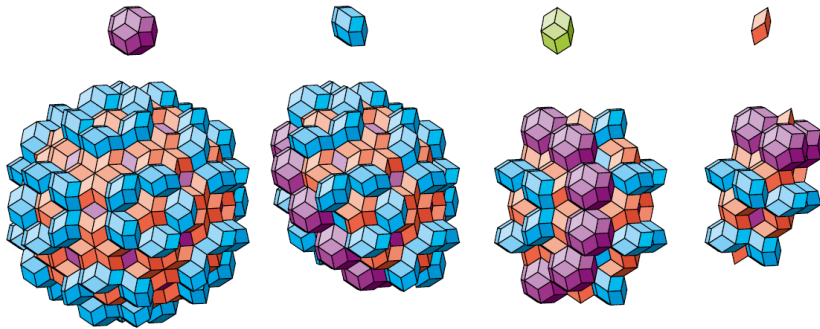
Yb-Cd



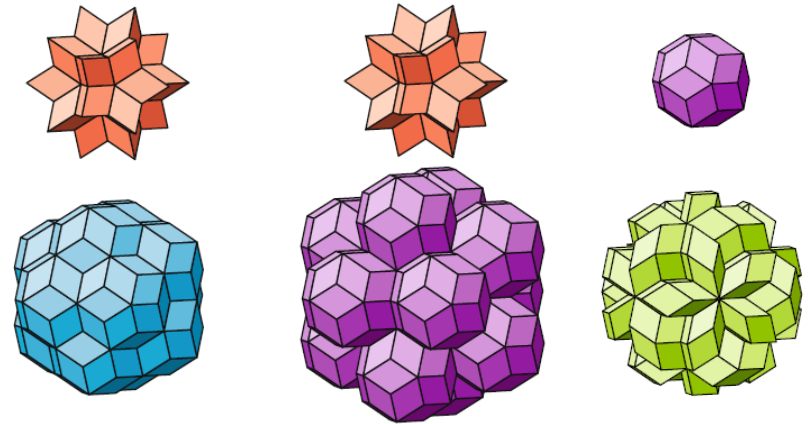
# Метод четырех элементарных ячеек

Определяются: тип ячейки, координаты центра ячейки, ориентация

4 типа элементарных ячеек



3 варианта инициализации

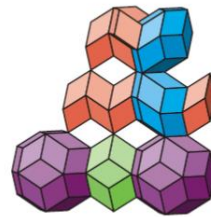
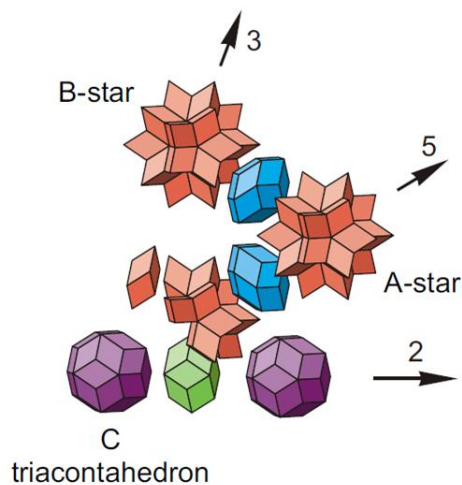


A

B

C

правила подстановок



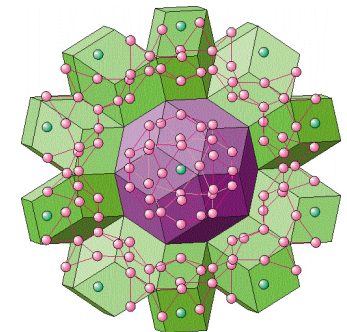
Теория групп:  
орбита и  
стабилизатор

итерации

декорирование

$$\mathbf{R}_k = \tau^3 \mathbf{R}_i + g_i \mathbf{R}_j$$

$$g_k = g_i g_j$$



*A.E. Madison*  
*RSC Advances*, 2015, **5**, 5745-5753.  
*RSC Advances*, 2015, **5**, 79279–79297.



**RSC Advances**

**COMMUNICATION**



Cite this: *RSC Adv.*, 2015, **5**, 5745

## Substitution rules for icosahedral quasicrystals†

Alexey E. Madison<sup>\*ab</sup>



**RSC Advances**

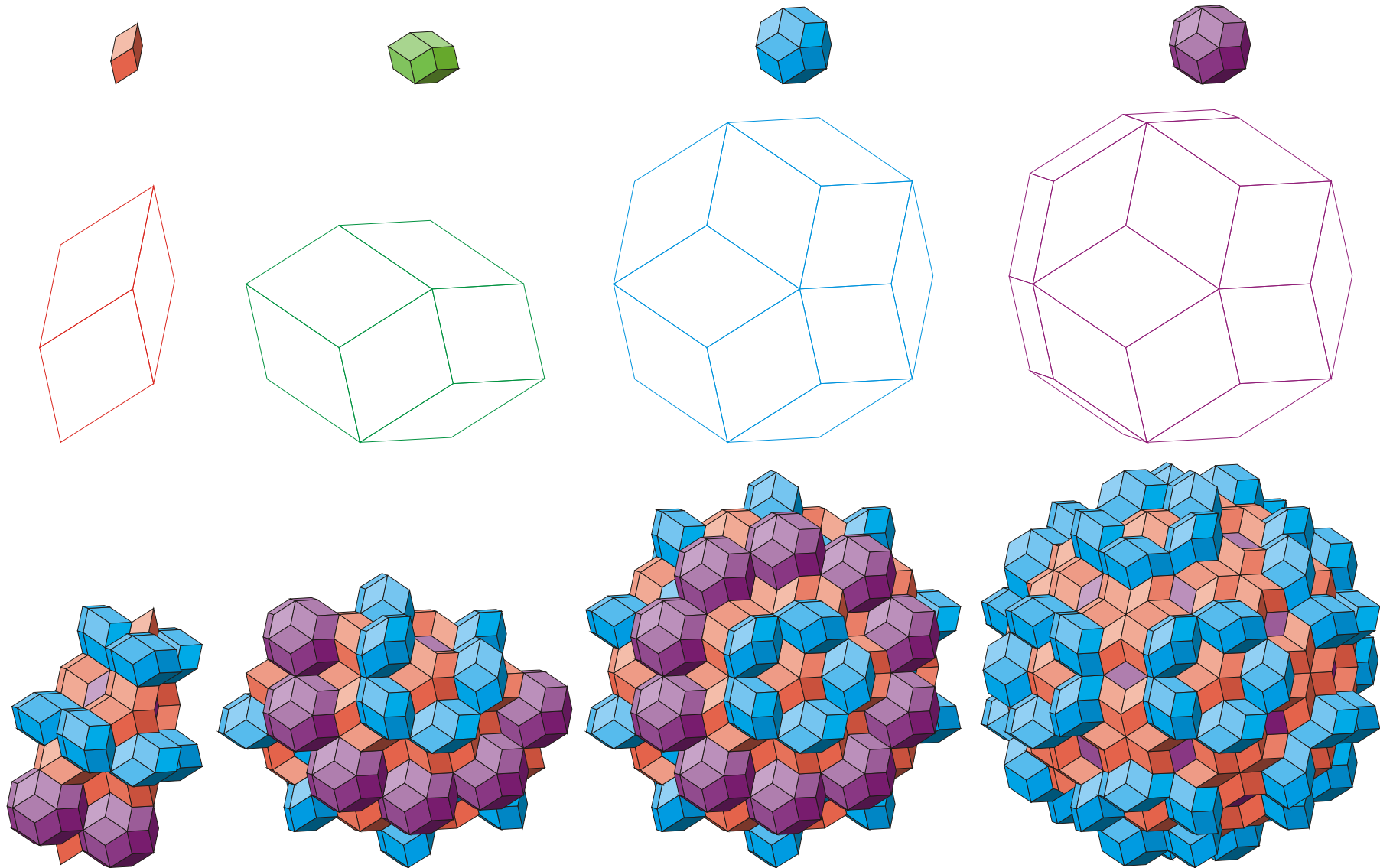
**PAPER**



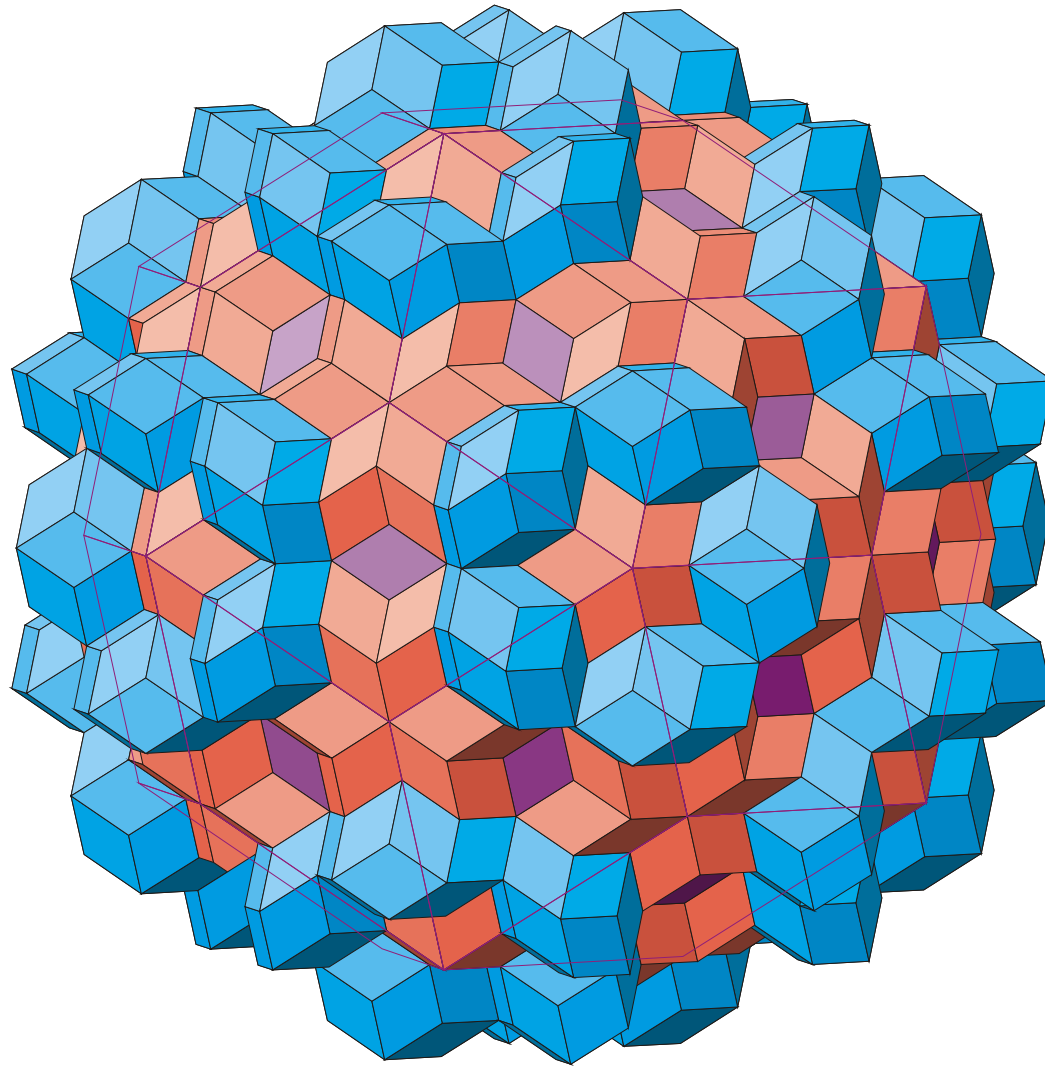
Cite this: *RSC Adv.*, 2015, **5**, 79279

## Atomic structure of icosahedral quasicrystals: stacking multiple quasi-unit cells

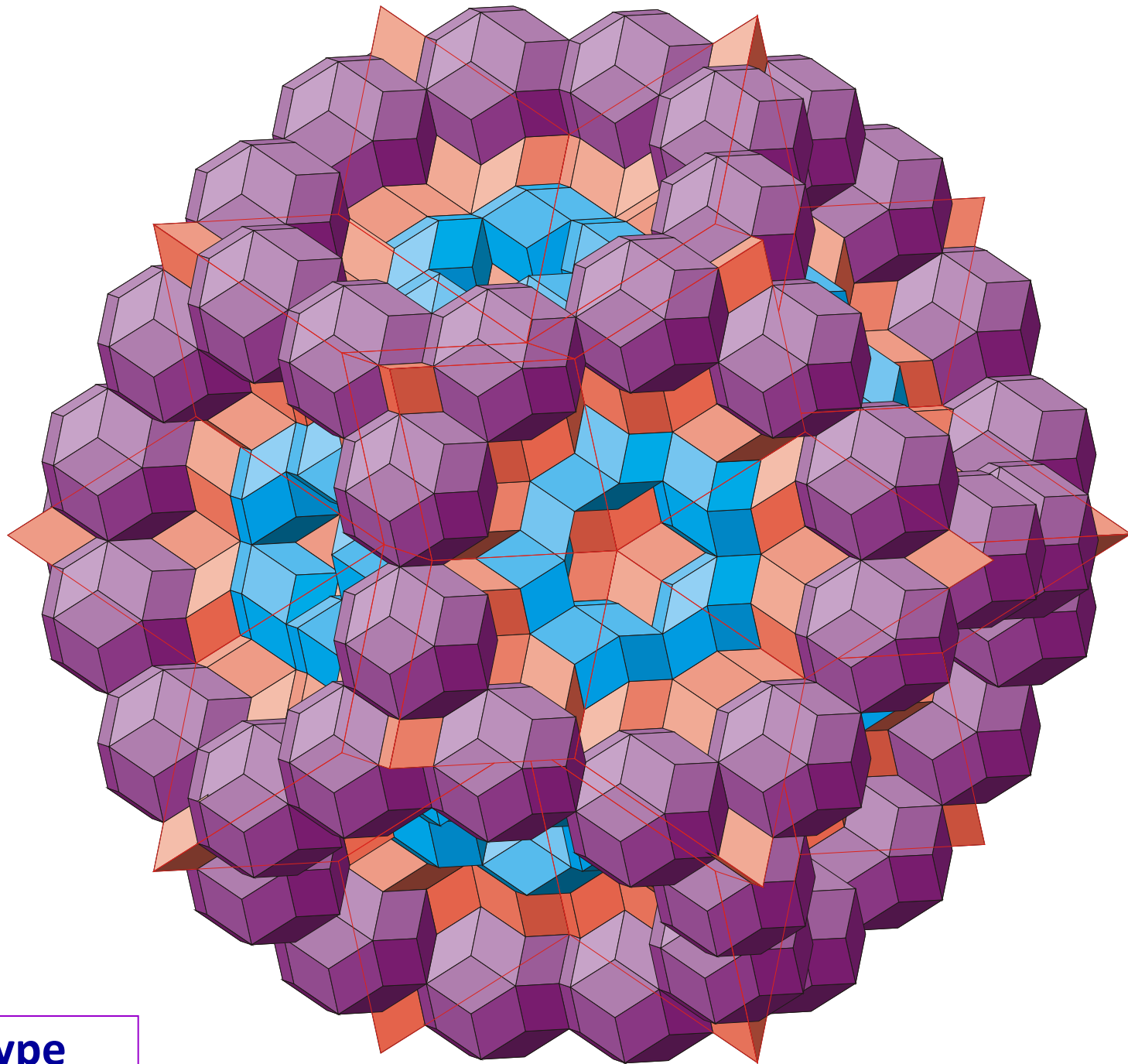
Alexey E. Madison<sup>\*ab</sup>



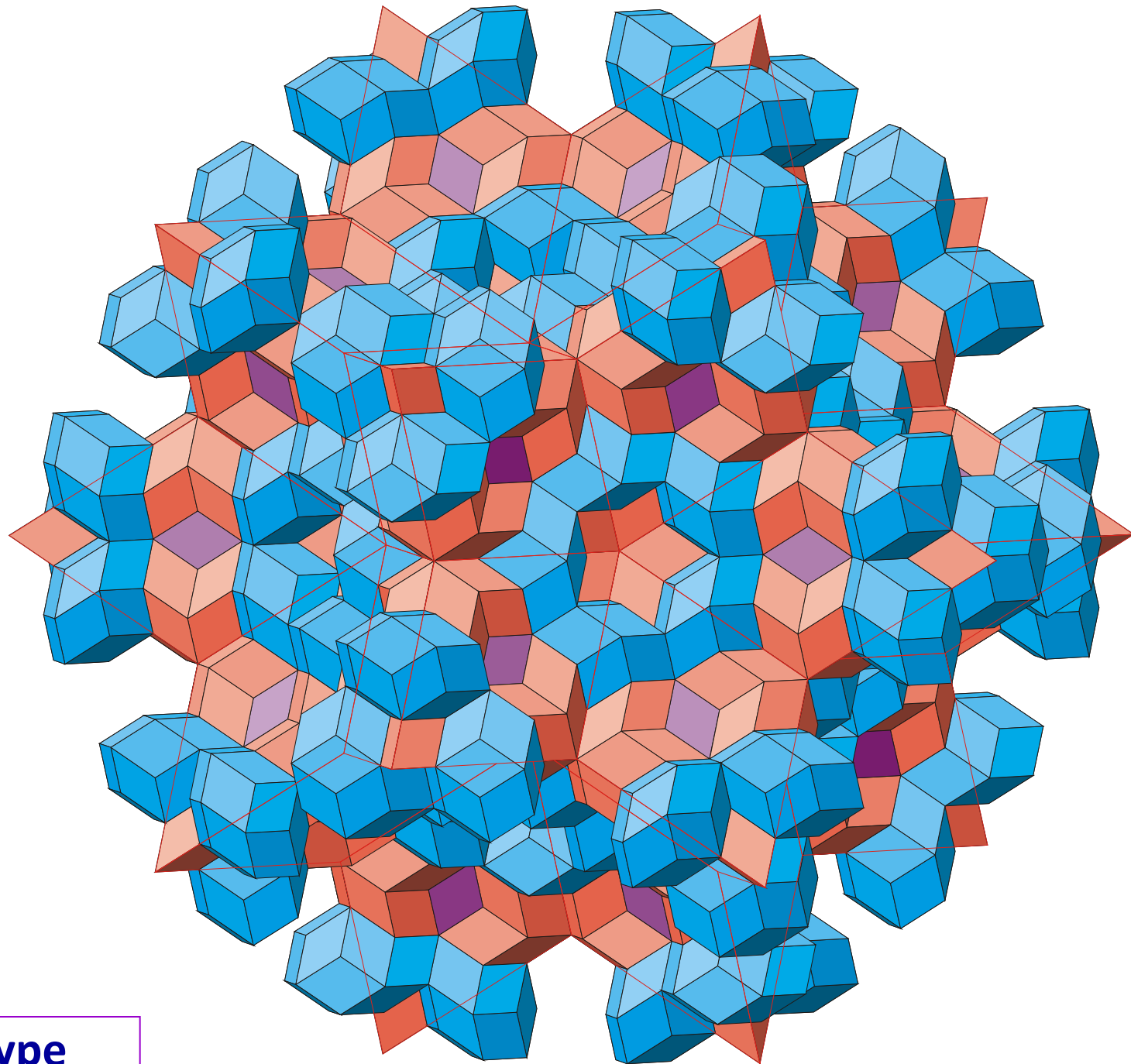
**Inflation/deflation rules for golden zonohedra**



**Rhombic triacontahedron**

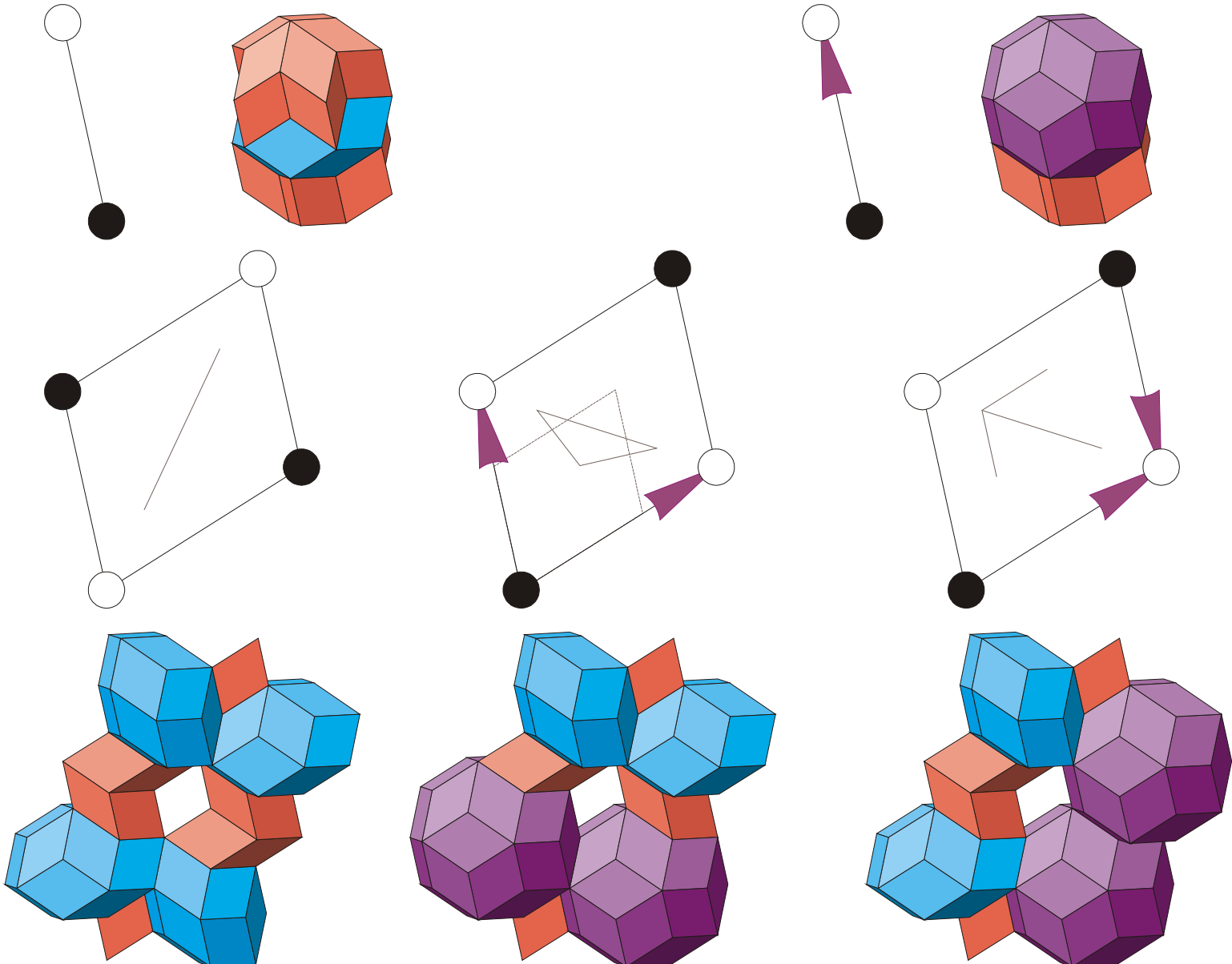


**A-type**

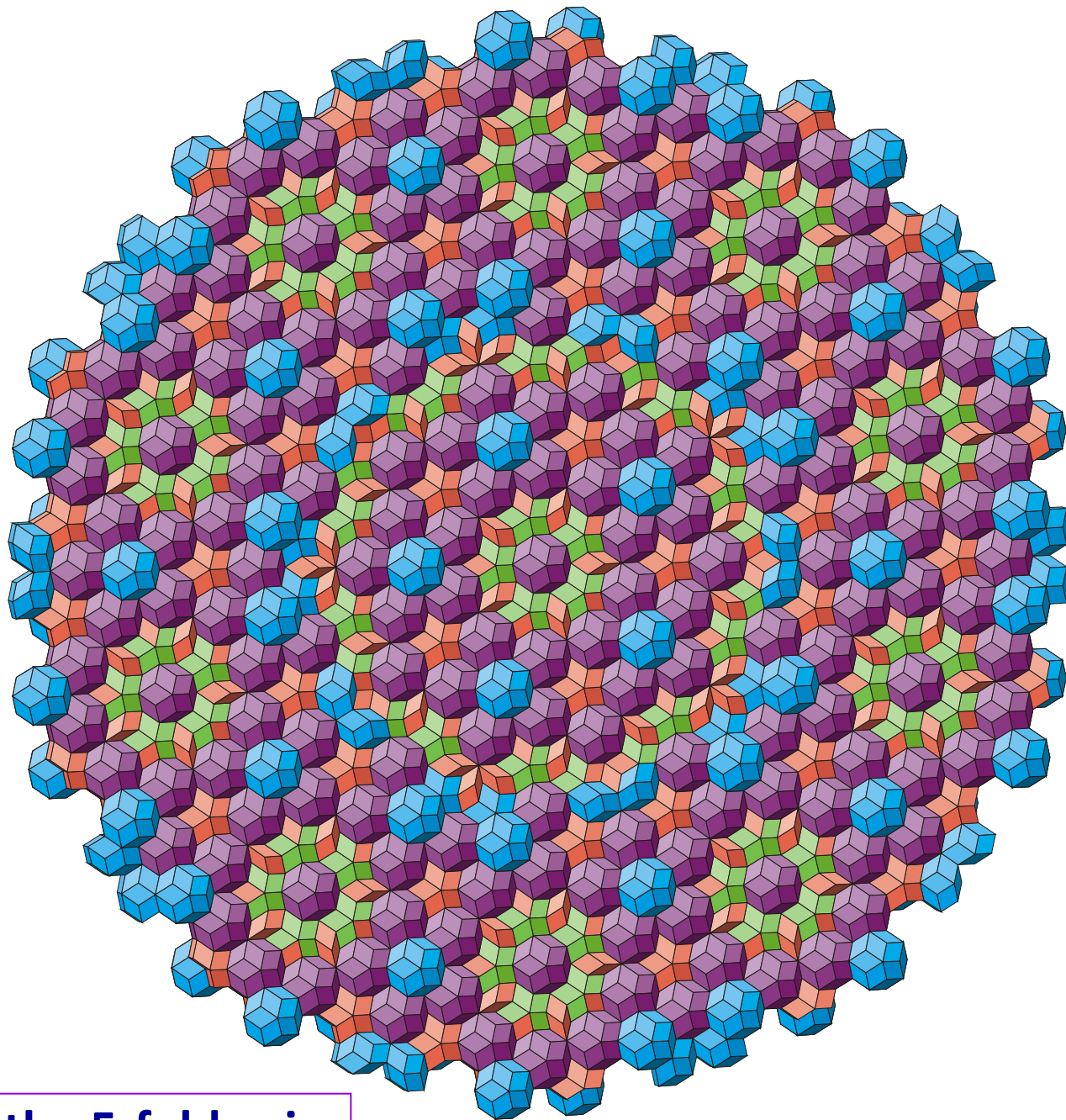


**B-type**

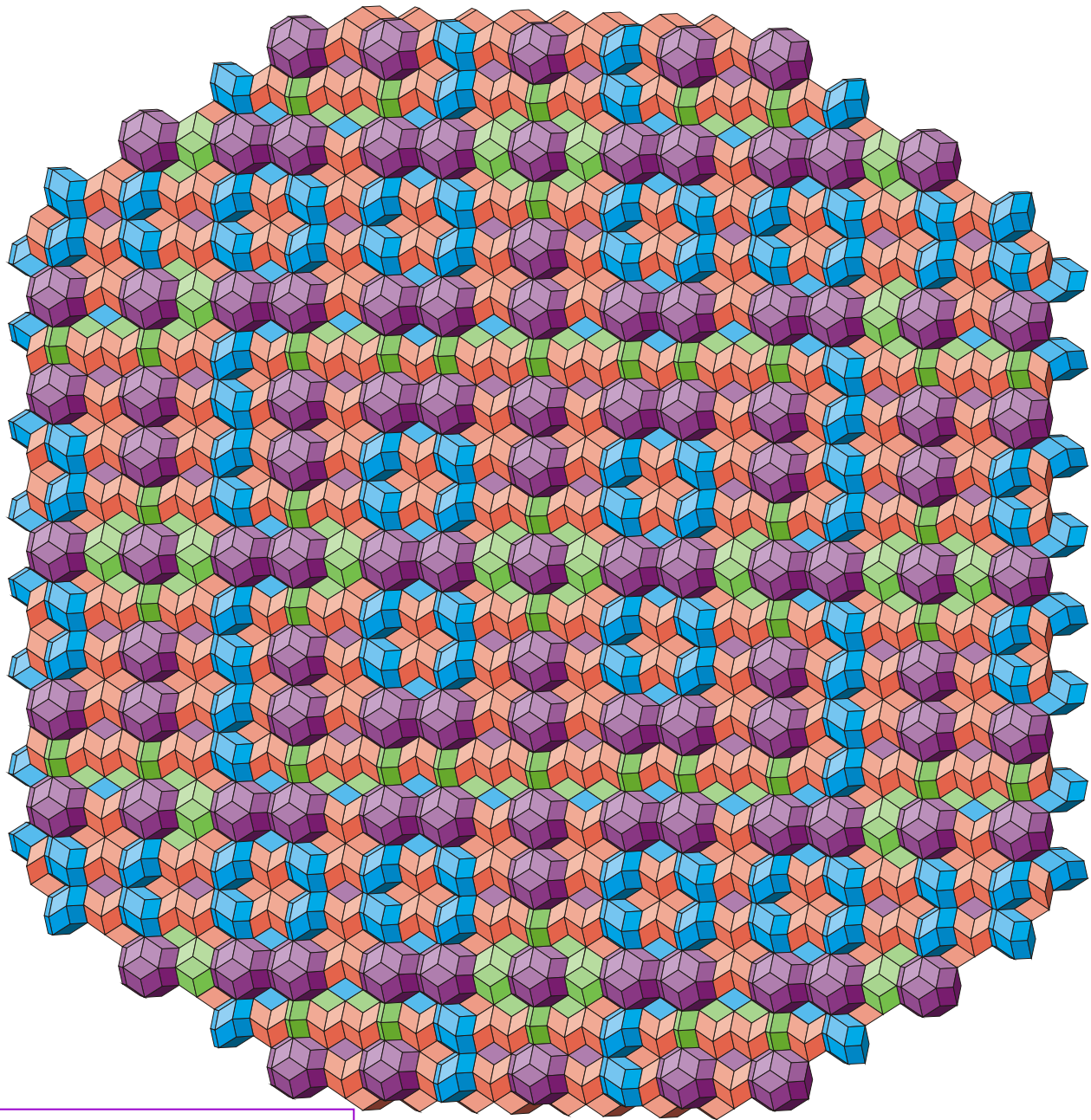
# Local matching rules



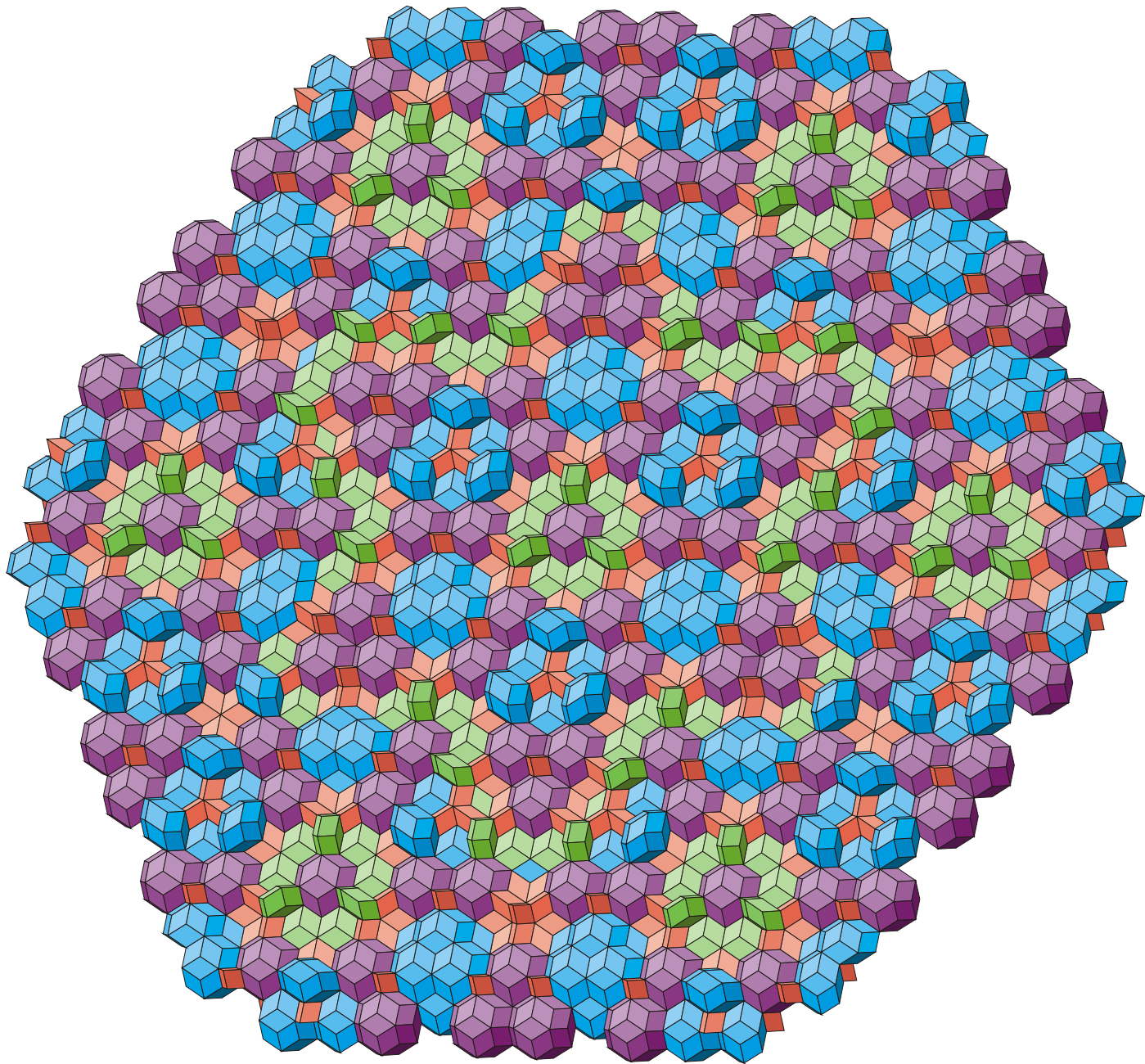




normal to the 5-fold axis

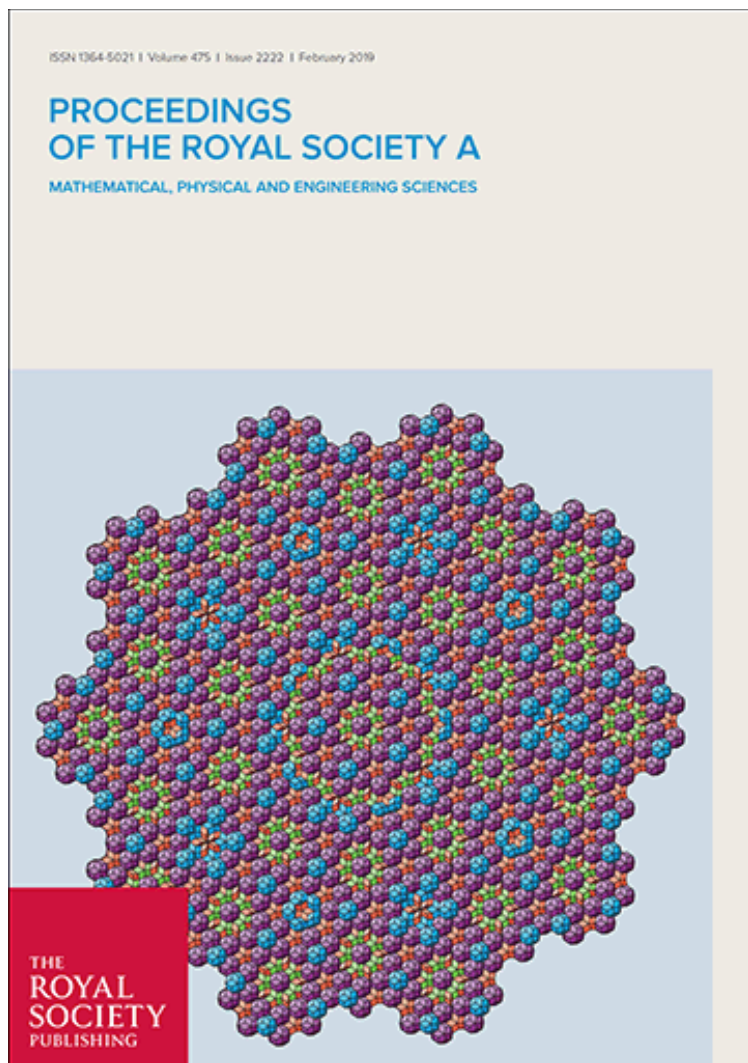


normal to the 2-fold axis



**normal to the 3-fold axis**

# Looking for alternatives to the superspace description of icosahedral quasicrystals



## PROCEEDINGS A

royalsocietypublishing.org/journal/rspa

### Research



**Cite this article:** Madison AE, Madison PA. 2019 Looking for alternatives to the superspace description of icosahedral quasicrystals. *Proc. R. Soc. A* **475**: 20180667. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2018.0667>

Received: 25 September 2018  
Accepted: 29 November 2018

**Subject Areas:**  
materials science, crystallography

**Keywords:**  
quasicrystals, icosahedral symmetry, substitution tiling

**Author for correspondence:**  
A. E. Madison  
e-mail: alex\_madison@mail.ru

## Looking for alternatives to the superspace description of icosahedral quasicrystals

A. E. Madison<sup>1</sup> and P. A. Madison<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, ul. Polytechnicheskaya 29, 195251 Saint-Petersburg, Russia  
<sup>2</sup>St. Petersburg Electrotechnical University 'LETI', ul. Professora Popova 5, 197376 Saint-Petersburg, Russia  
AEM, 0000-0001-7592-2980

A multiple-cell approach is discussed as a possible alternative to the higher dimensional crystallography of icosahedral quasicrystals. It is based on the Socolar–Steinhardt tiling combined with the quasi-unit cell model. Quasi-unit cells fill the space without gaps and overlappings similar to those in periodic crystals. Similarly, the atoms can occupy general and special positions. The alloy stoichiometry and the packing density can be calculated through the relative tile frequencies, which in turn are determined as the components of the Perron–Frobenius eigenvector of the corresponding substitution matrix. The calculation of the diffraction pattern reduces to the Perron projection of a special matrix, the entries of which reflect the contribution of each type of quasi-unit cell to the coherent scattering.

### 1. Introduction

Determination of crystal structure is one of the key problems in rational materials design, which is based on understanding the relationships between chemical composition, on the one hand, and controlled crystal structure and desired physical properties, on the other. In comparison with conventional periodic crystals, quasicrystal structure analysis is still far from being a straightforward task [1,2].

The atomic structure of quasicrystals is usually interpreted within the superspace concept. In particular, the structure of an icosahedral quasicrystal can be generated by taking an irrational three-dimensional (3D) slice through a six-dimensional (6D) hypercubic lattice [3]. For a more comprehensive study, see [4–7].

# Spektrum der Wissenschaft

www.Spektrum.de 9.19

9.19

## Spektrum der Wissenschaft

### Künstliches Leben

Forscher bauen die  
ersten komplett  
synthetischen Organismen

8,90 € (DM 12,50) • M 4,- € • DTP/BSE  
Deutsche Ausgabe des SCIENTIFIC AMERICAN



**GRAVITATION** Ohne Dunkle Materie gelten andere Gesetze  
**GENTHERAPIE** Heilung schon im Mutterleib?  
**HÖHENSTRÖMUNG** Rätselhafte Winde in der Stratosphäre

### MATHEMATISCHE UNTERHALTUNGEN NEUE MODELLE FÜR QUASIKRISTALLE

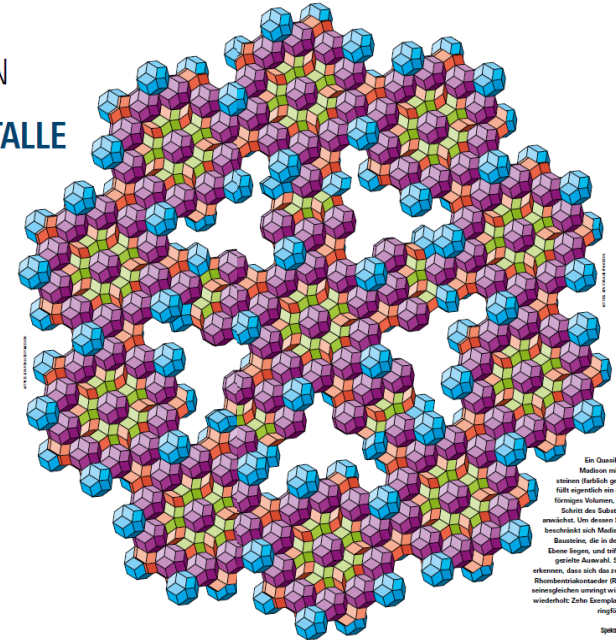
Konstruktionsverfahren für nichtperiodische Pflasterungen der Ebene lassen sich auf den Raum erweitern. Vor allem mit Hilfe des Substitutionsprinzips kann man dreidimensionale nichtperiodische Raumfüllungen erzeugen und damit ein Modell für jene seltsamen Festkörper liefern, welche Physiker als Quasikristalle bezeichnen.

Christoph Pöggendorf ist promovierter Mathematiker und war bis 2010 Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.  
#spektrum.de/artikel/1501850

In der letzten Folge dieser Rubrik (siehe Spektrum Juli 2018, S. 80) ging es darum, wie Künstler die speziellen Eigenschaften der so genannten Penrose-Parkette für ihre Zwecke nutzen. Demen Überbausteine sind zwei »goldene Dreiecke«: gleichschenkelige Dreiecke mit dem Seitenverhältnis des goldenen Schnitts  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ , ein breites mit langer Basis und kurzen Schenkeln und ein hohes, bei dem die Schenkel 3-mal so lang sind wie die Basis. Zwei Exemplare eines goldenen Dreiecks, mit den Basen aneinandergelegt, ergeben eine dicke beziehungsweise eine dünne Raute, und dies sind die Pflastersteine, mit denen man ein im Prinzip unendliches Parkett legen kann. Allerdings nicht beliebig! Spezielle »Folgerregeln«, anschaulich gemacht durch eine Musterung der Steine oder eine Deformation ihrer Konturen, erzwingen, dass das Parkett nichtperiodisch ist. Das heißt, anders als in der klassischen Badecimarkachelung gibt es keine Parallelverschiebung, die das ganze Parkett mit sich selbst zur Deckung bringt. Vielmehr steckt in dem ganzen Muster eine fünfzählige Symmetrie – irgendwie.

Ein sehr nützliches theoretisches Hilfsmittel zum Verständnis der nichtperiodischen Parkettierungen ist die so genannte Substitution. Man zerlegt jeden Stein in eine Menge verkleinerter Exemplare aus demselben Steintyp und vergößert das so erhaltene Parkettfragment so,

74 Spektrum der Wissenschaft 9.19

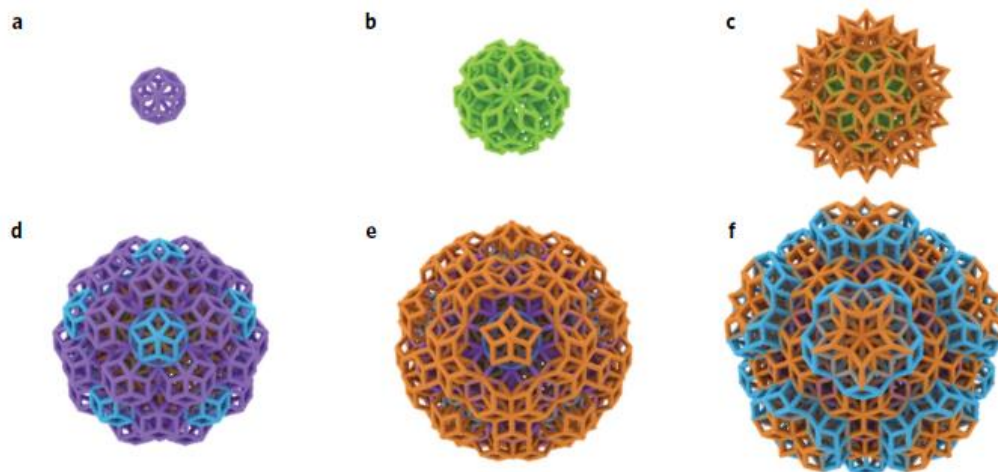
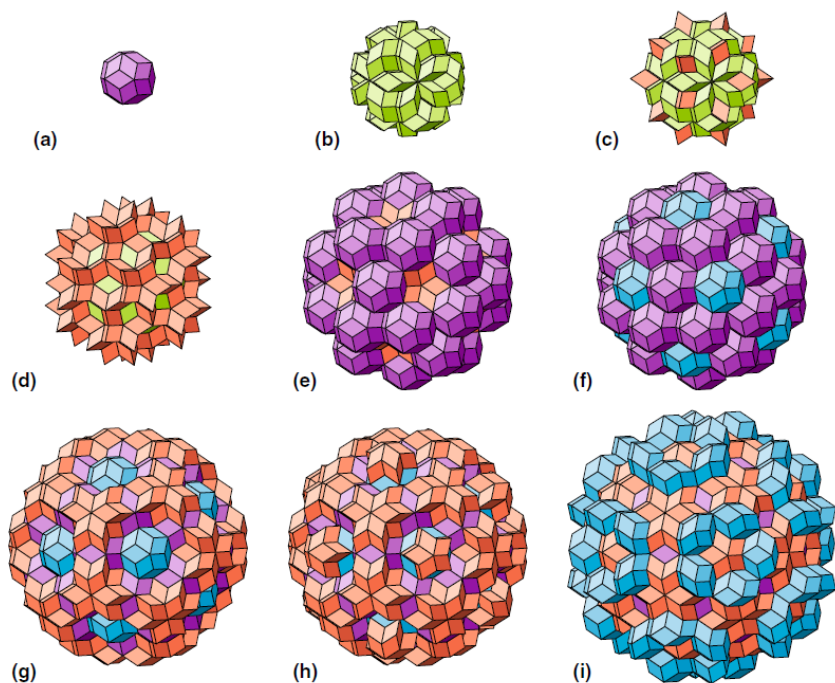


Ein Quasikristall, so wie ihn Alamy Medien mit vier verschiedenen Bausteinen farblich gekennzeichnet modelliert, füllt eigentlich ein ganzes, annähernd kugelförmiges Volumen, das oben links mit jedem Schritt des Substitutionsverfahrens weiter anwächst. Um dessen Struktur zu verdeutlichen, beschränkt sich Alamy in diesem Bild auf die Bausteine, die in der Nähe einer bestimmten Ebene liegen, und teilt unter diesen noch eine gewisse Auswahl. So lässt sich zum Beispiel erkennen, dass sich das zentrale Muster aus einem Rhombenstapel der (P2), versteht, das von zehn senkrechten unregelmäßig, in größerem Maßstab wiederholt. Zahlreiche Exemplare des Musters umgeben ringförmig das zentrale Muster.

Spektrum der Wissenschaft 9.19 75

Madison, 2015

Jeon, Kwon, Hur, 2017



RSC Advances

COMMUNICATION



Cite this: *RSC Adv.*, 2015, 5, 5745

Substitution rules for icosahedral quasicrystals†

Alexey E. Madison\*<sup>a,b</sup>



nature  
physics

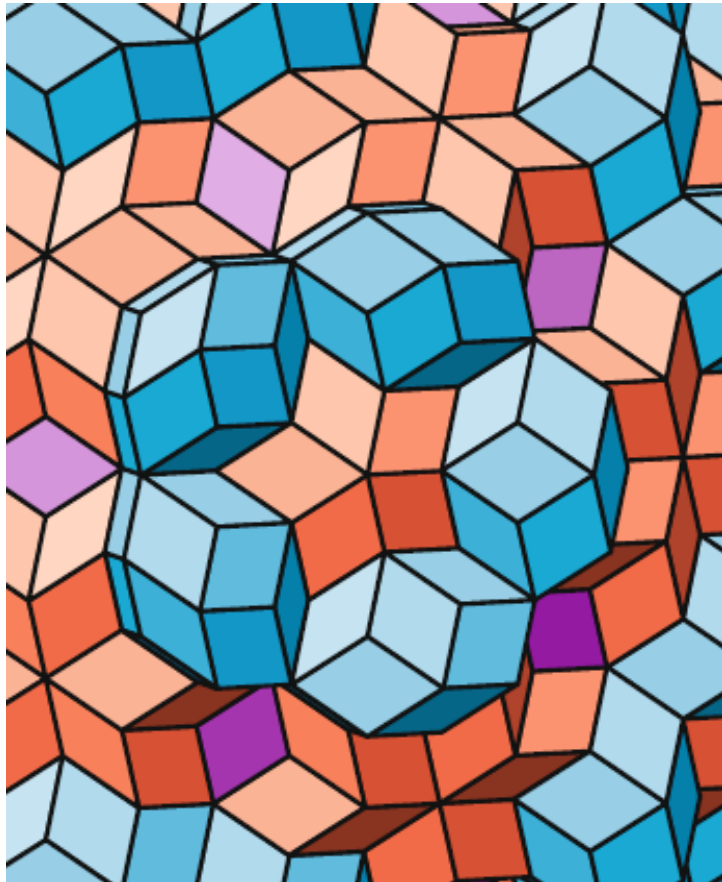
LETTERS

PUBLISHED ONLINE: 9 JANUARY 2017 | DOI: 10.1038/NPHYS4002

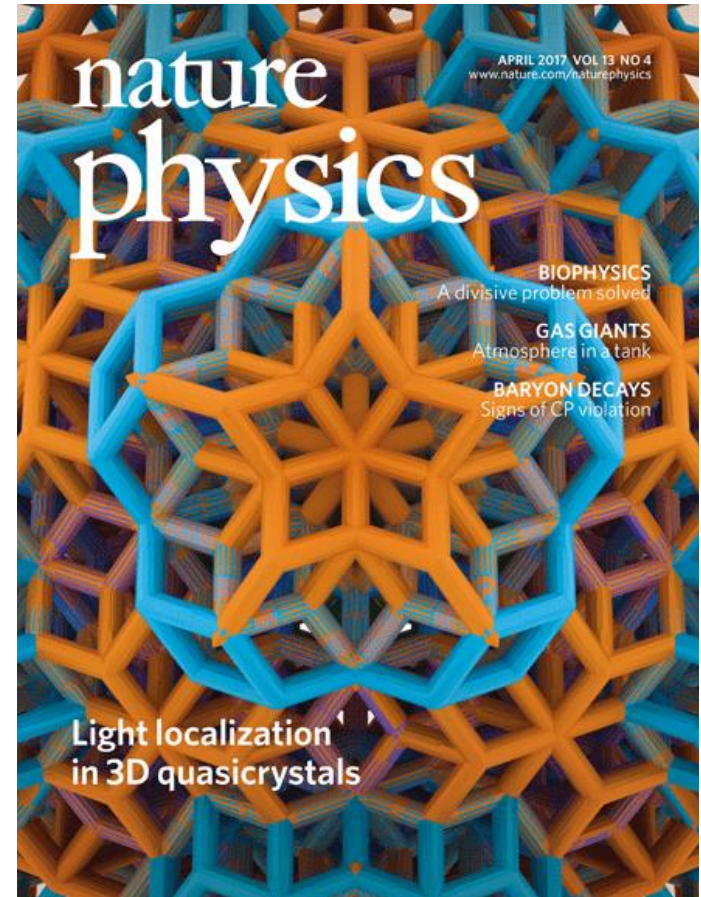
Intrinsic photonic wave localization in a  
three-dimensional icosahedral quasicrystal

Seung-Yeol Jeon<sup>1</sup>, Hyungho Kwon<sup>1,2†</sup> and Kahyun Hur<sup>1,3\*</sup>

**Madison, 2015**

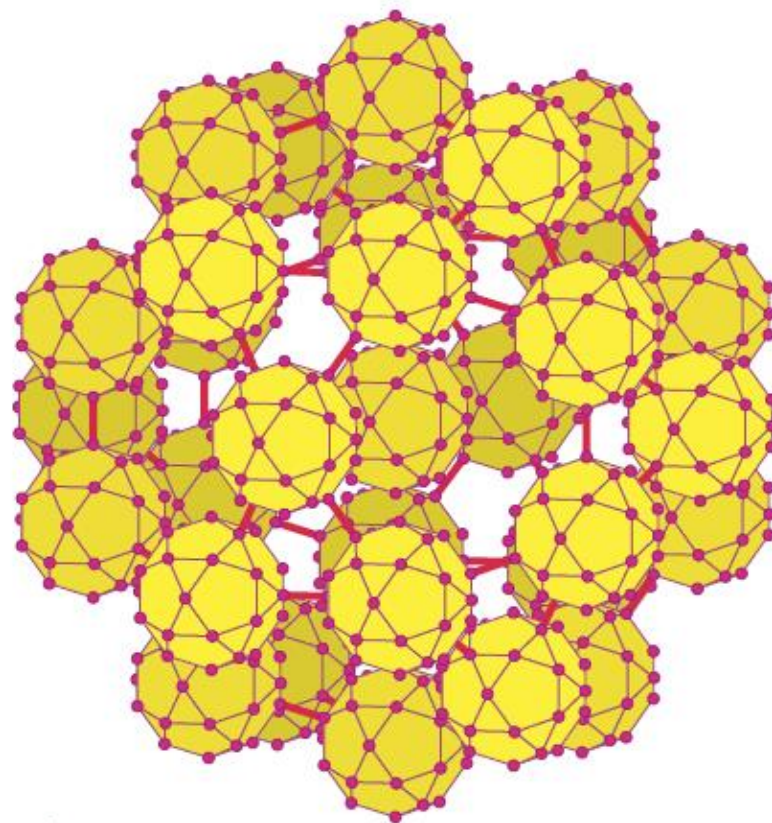
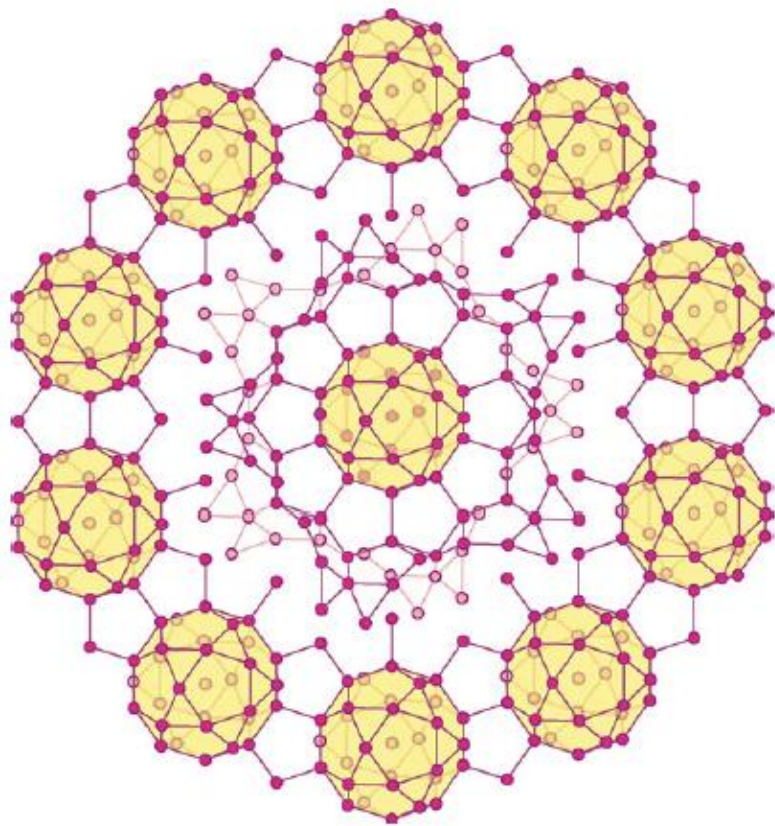


**Jeon, Kwon, Hur, 2017**



*A.E. Madison, P.A. Madison*

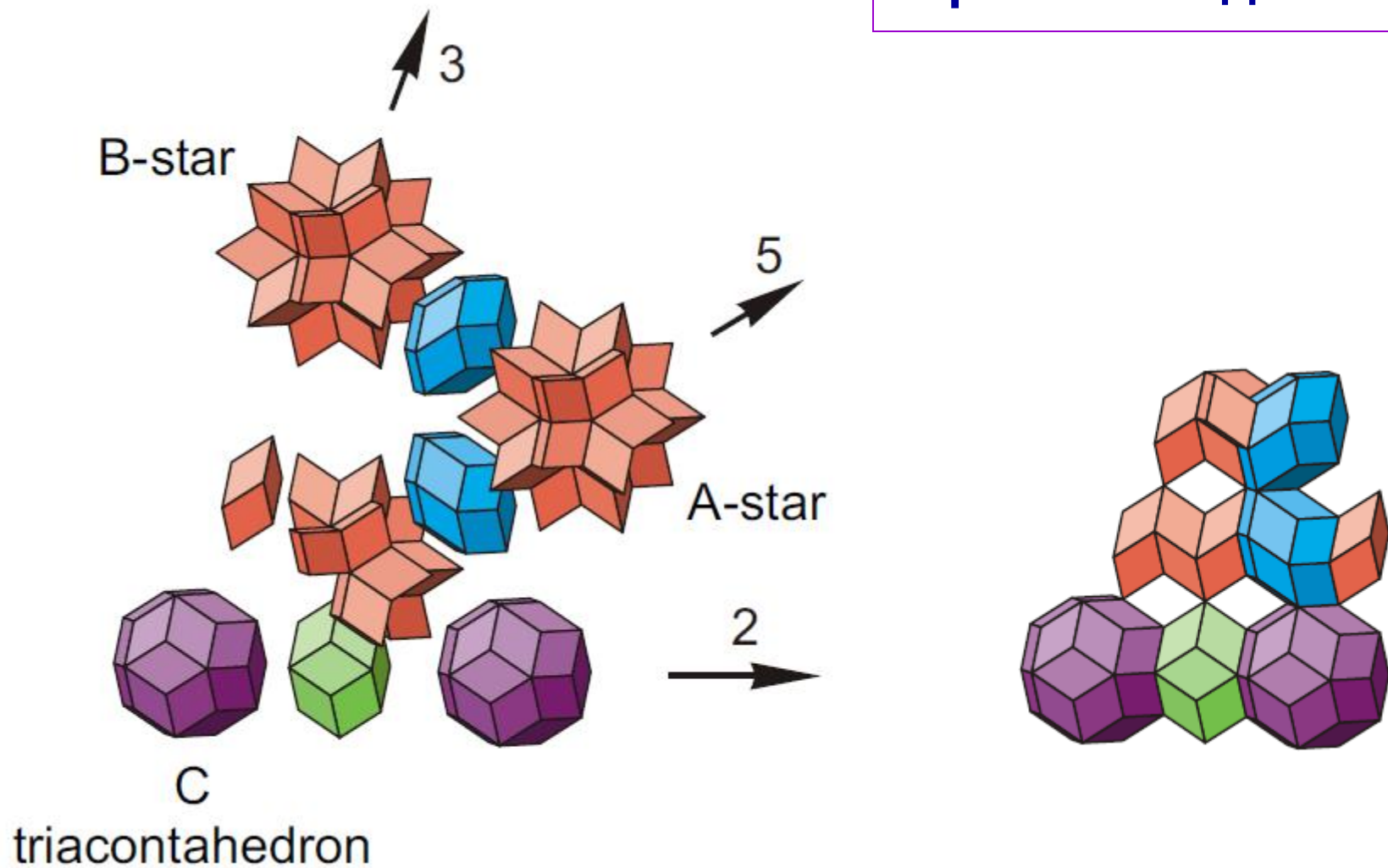
Structure of icosahedral quasicrystals within the multiple cell approach  
*Structural Chemistry*, 2020, **31**, 485–505.





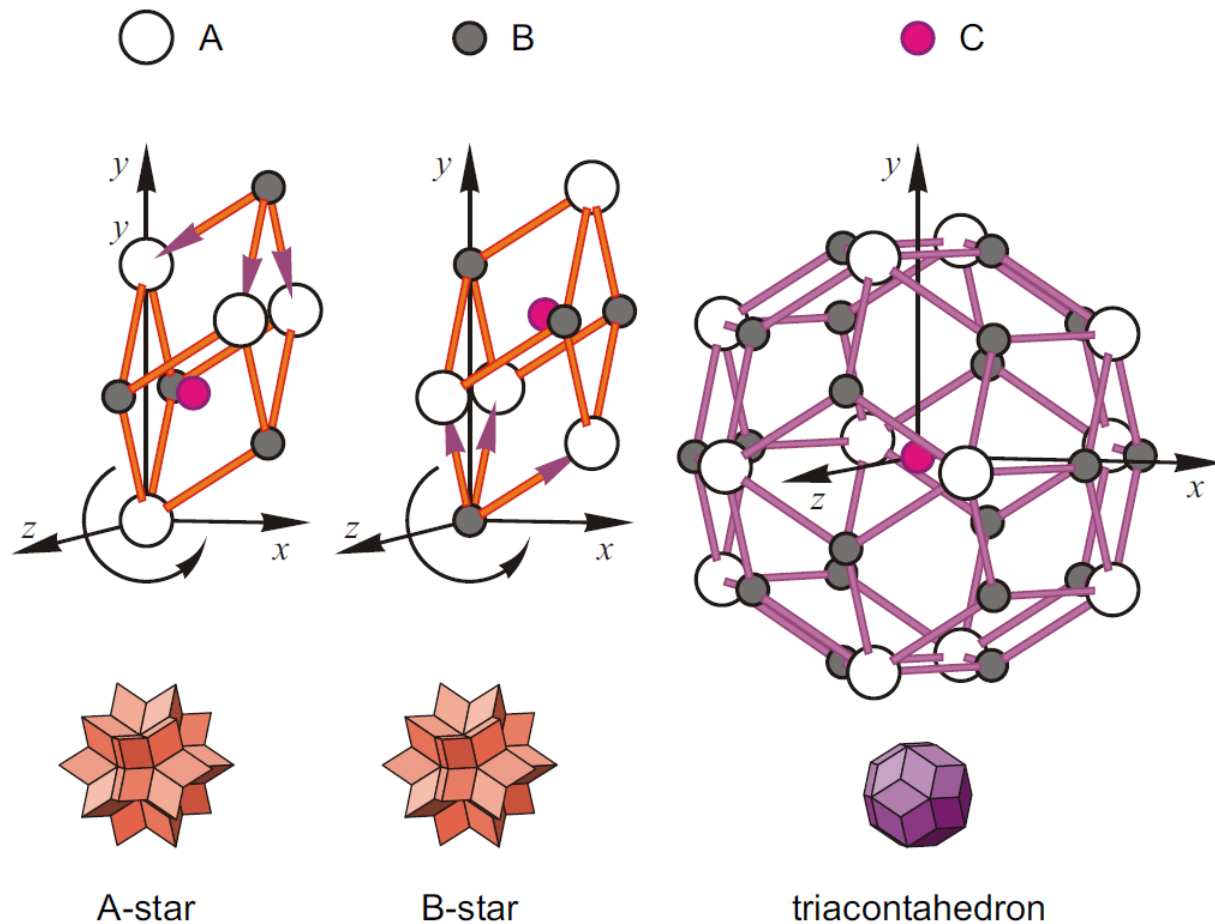
# Генерация упаковки

## Правила подстановки



# Генерация упаковки

## Инициализация



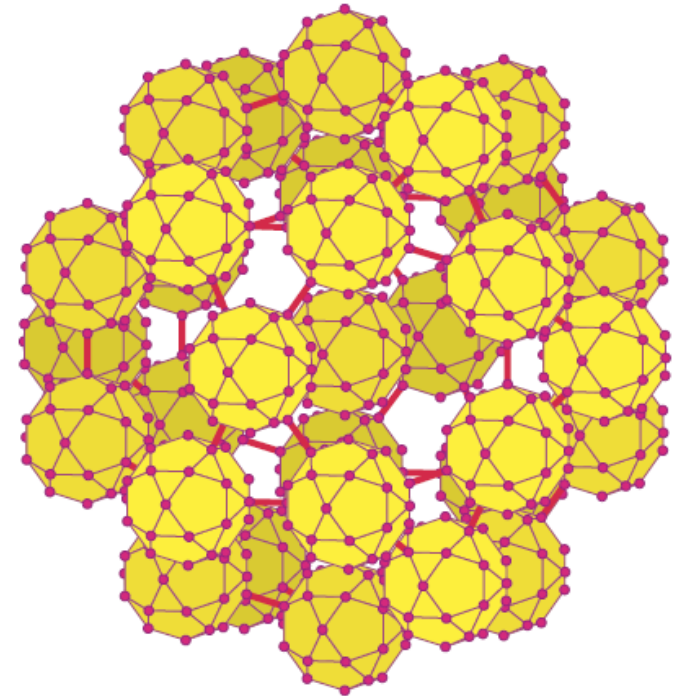
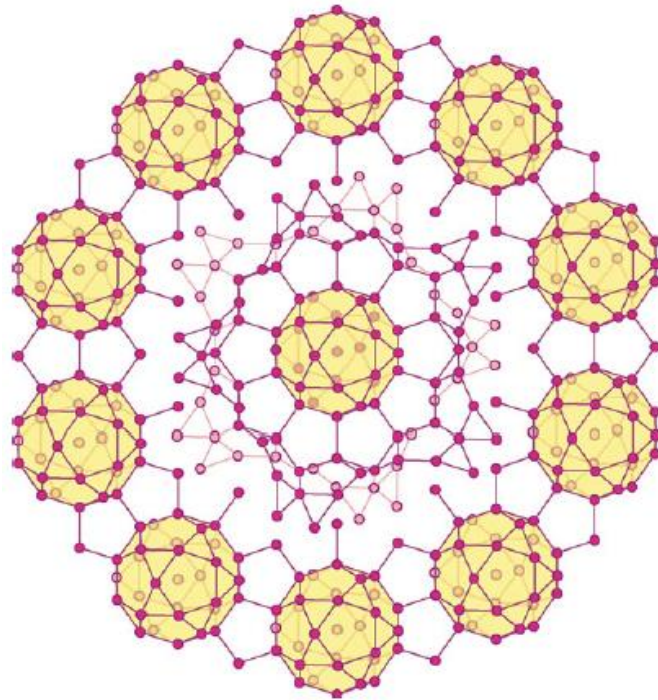
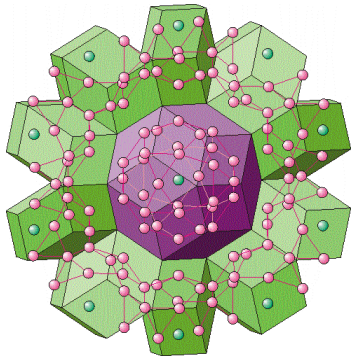
# Генерация упаковки

Итерации

$$\mathbf{R}_k = \tau^3 \mathbf{R}_i + g_i \mathbf{R}_j,$$

$$g_k = g_i g_j.$$

# Декорирование упаковки



# Концепция элементарных ячеек

*Журнал технической физики, 2024, том 94, вып. 4*

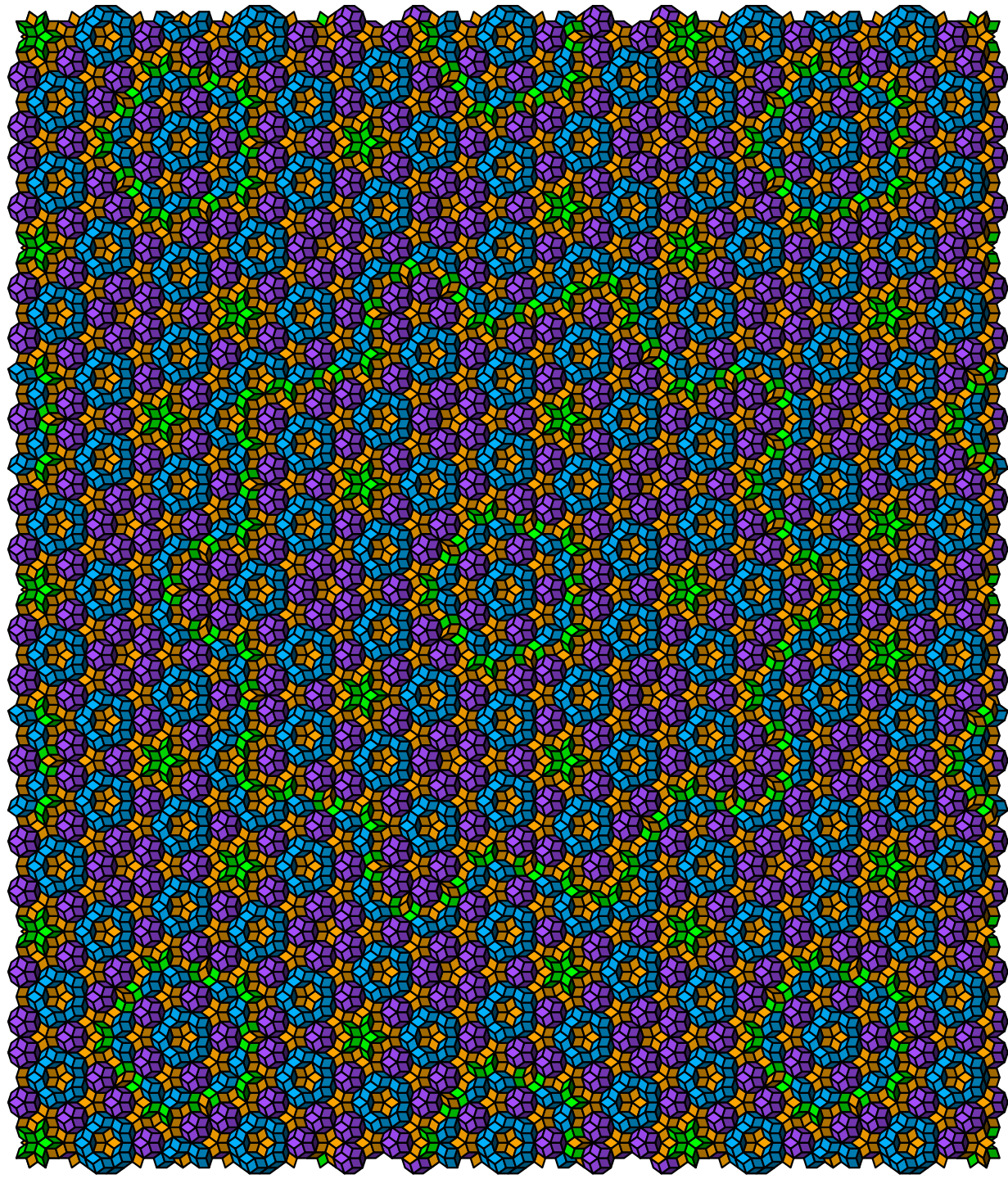
---

01

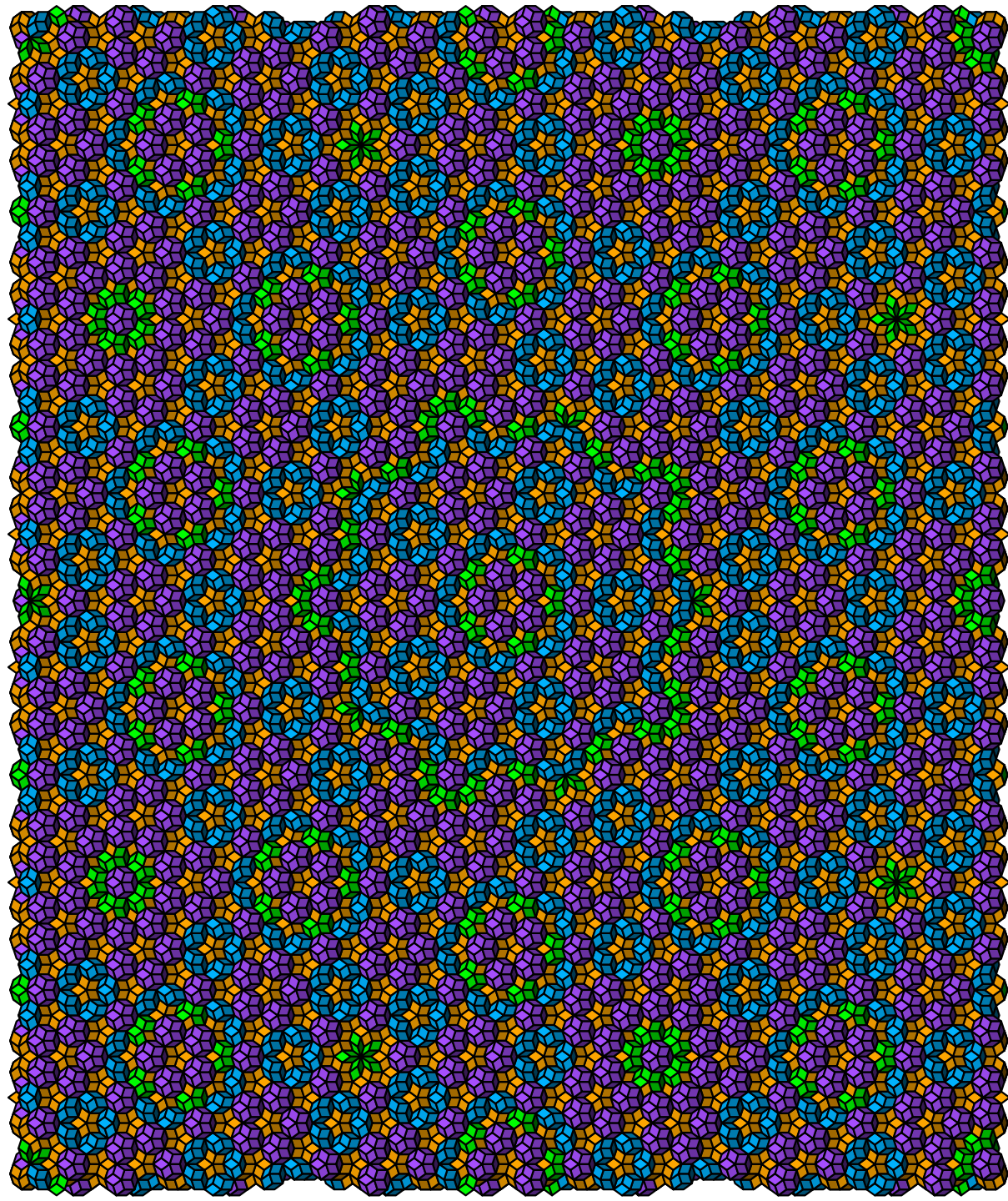
## **Концепция элементарных ячеек в теории квазикристаллов**

© А.Е. Мадисон,<sup>1</sup> П.А. Мадисон,<sup>1,2</sup> В.А. Мошников<sup>2</sup>

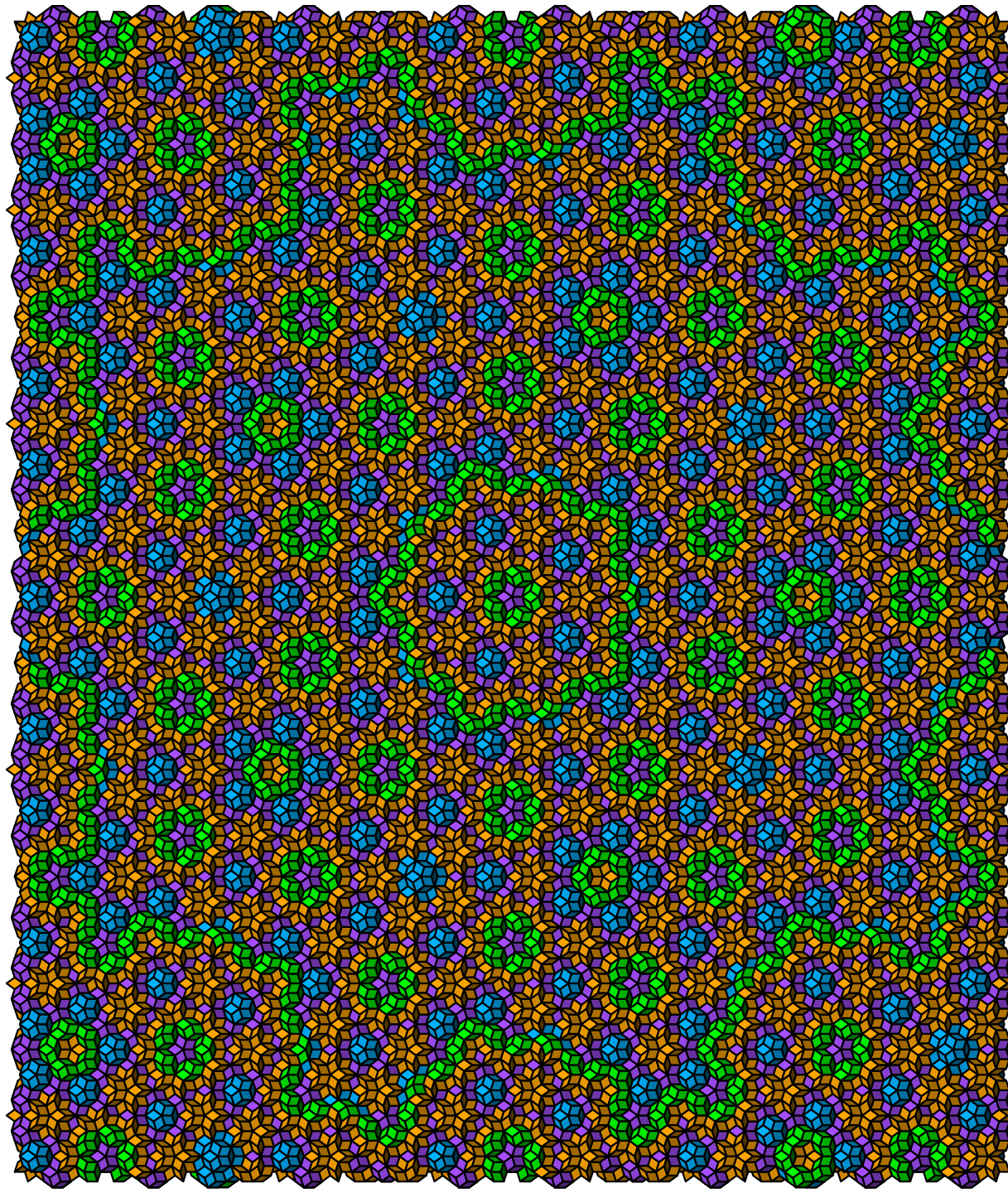
A



**B**



C





# Теория строения икосаэдрических квазикристаллов

*Журнал технической физики, 2024, том 94, вып. 12*

---

05

## **Теория строения икосаэдрических квазикристаллов: общие принципы**

© А.Е. Мадисон,<sup>1</sup> П.А. Мадисон<sup>1,2</sup>

*Журнал технической физики, 2025, том 95, вып. 1*

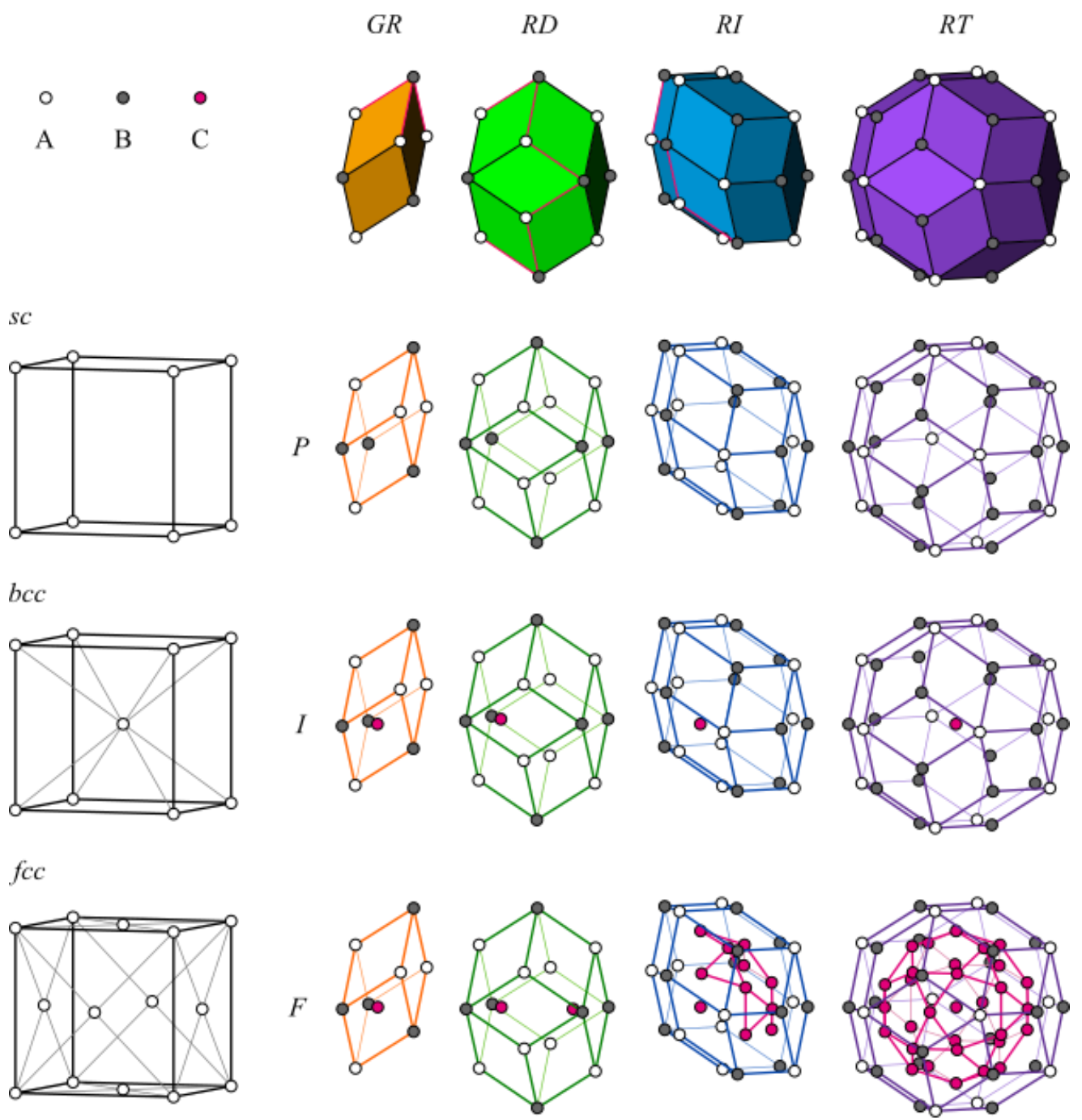
---

05

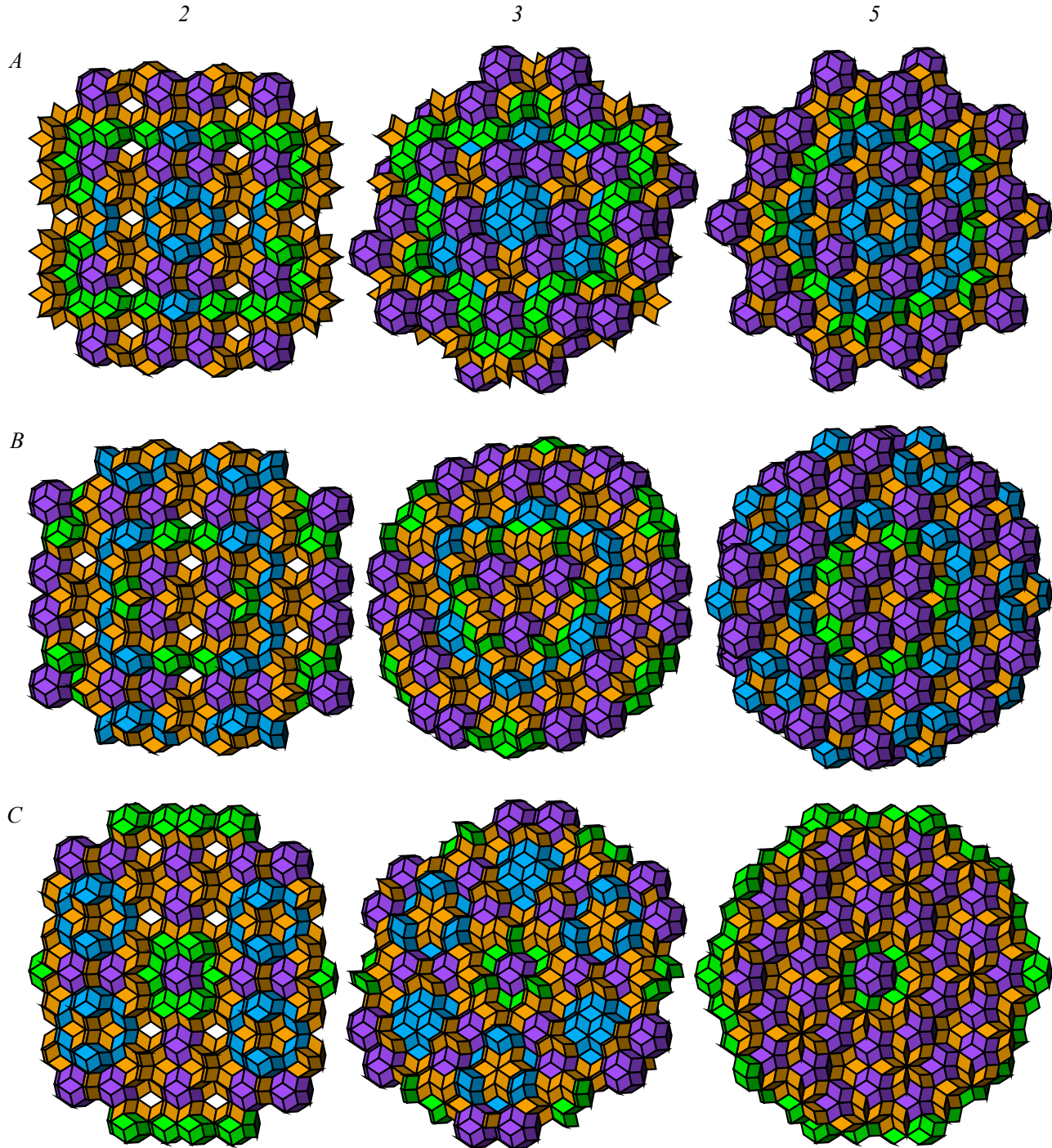
## **Теория строения икосаэдрических квазикристаллов: типы упаковок**

© А.Е. Мадисон,<sup>1</sup> П.А. Мадисон<sup>1,2</sup>

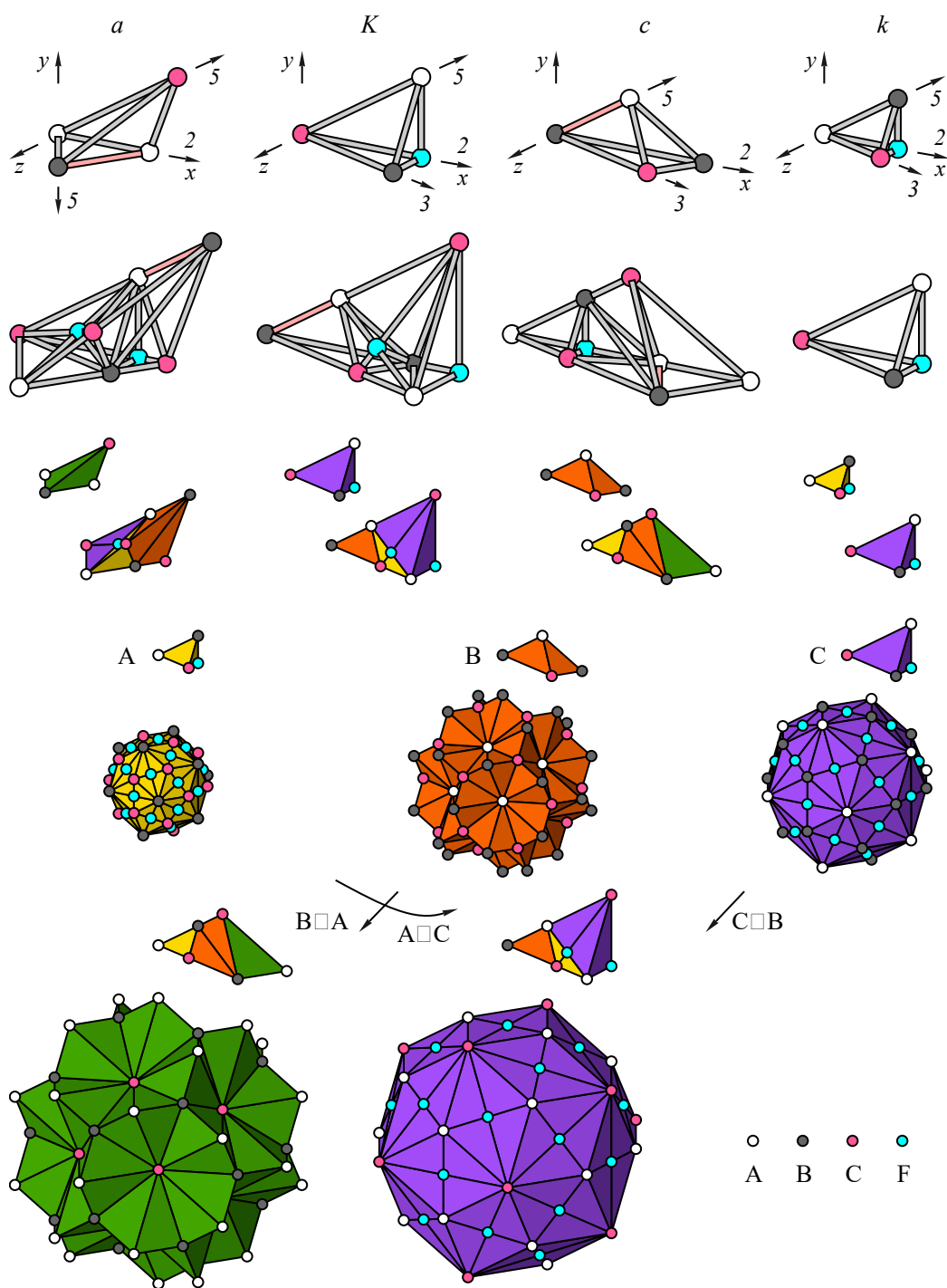
# 3 типа квази- решеток *P, I, F*



3 типа  
узлов



# I-ТИП



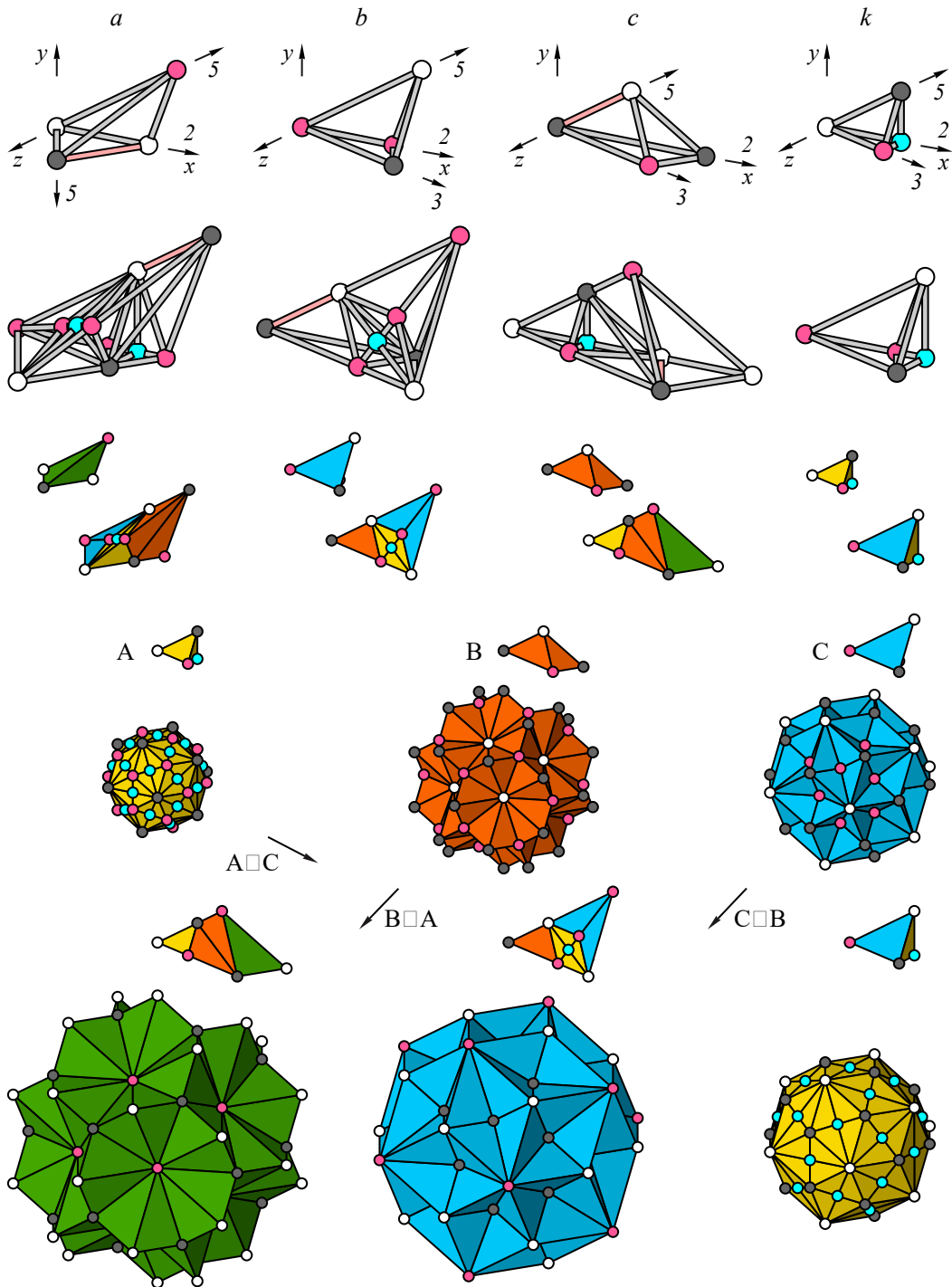
# I-ТИП

## Формализация правил подстановок

**Таблица 2.** Правила подстановок для упаковки I-типа

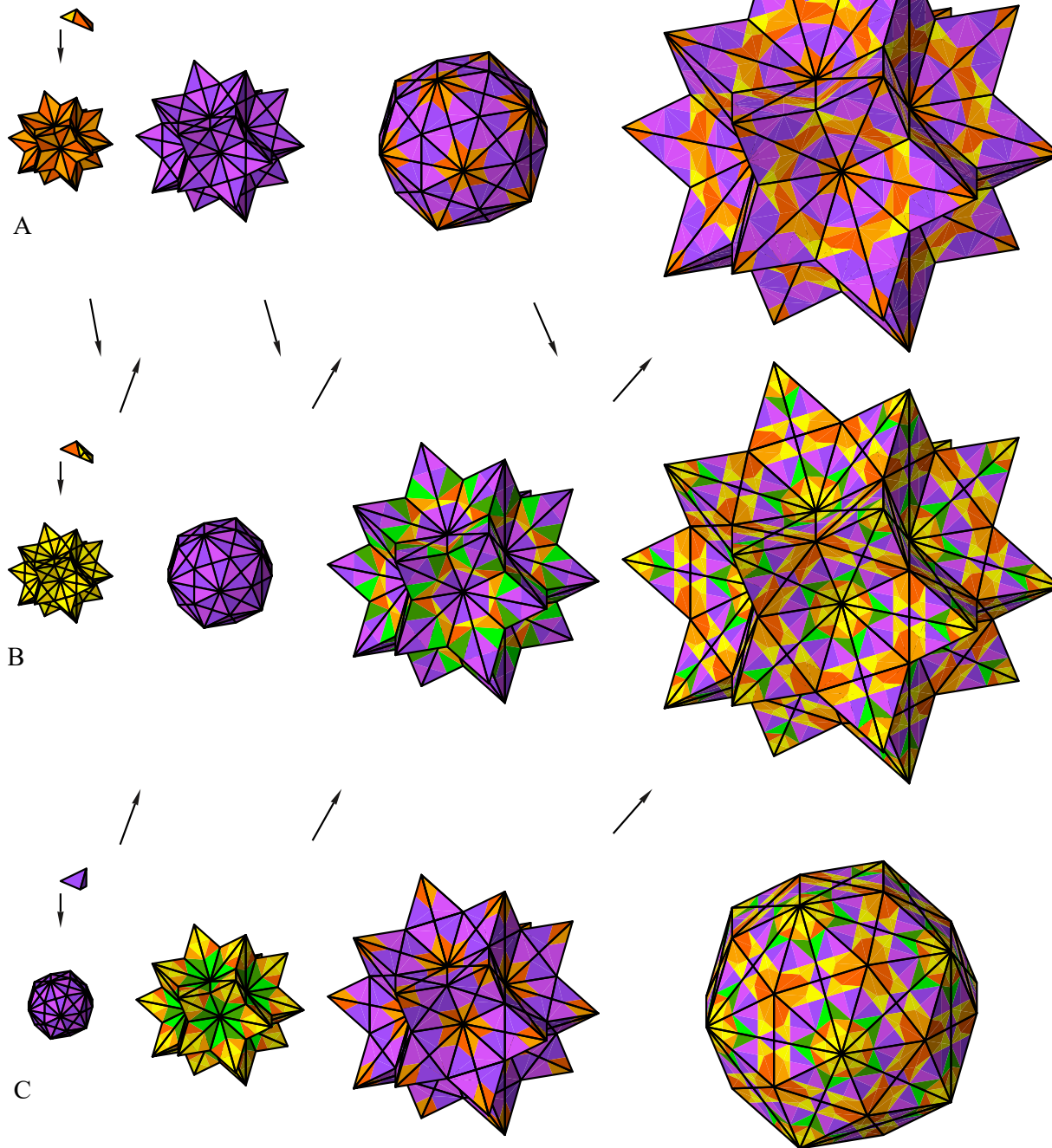
№ $j$	Тип ячейки	Положение $\mathbf{R}_j$	Ориентация № $g_j$	
$a \rightarrow \text{infl}(a)$				
1	$K$	$(0, 0, 0)$	1	1
2	$K$	$(0, 0, 0)$	111	$m(15)$
3	$K$	$(0, 0, 0)$	28	$3(154)$
4	$k$	$(1 + \tau, \tau, 0)$	104	$\overline{3}^5(498)$
5	$k$	$(1 + \tau, \tau, 0)$	20	$5^3(1)$
6	$k$	$(\tau, 0, 1 + \tau)$	102	$\overline{3}^5(387)$
7	$c$	$(1 + 2\tau, 1 + \tau, 0)$	54	$2(56)$
8	$c$	$(1 + 2\tau, 1 + \tau, 0)$	77	$\overline{5}^7(4)$
$K \rightarrow \text{infl}(K)$				
1	$c$	$(0, 0, 0)$	1	1
2	$k$	$(\tau, 1, 0)$	76	$\overline{5}^7(3)$
3	$k$	$(1 + 2\tau, 0, \tau)$	55	$2(26)$
4	$K$	$(1 + 2\tau, 1 + \tau, 0)$	54	$2(56)$
5	$K$	$(1 + 2\tau, 1 + \tau, 0)$	63	$\overline{5}(2)$
6	$K$	$(1 + 2\tau, 1 + \tau, 0)$	41	$3^2(237)$
$c \rightarrow \text{infl}(c)$				
1	$k$	$(0, 0, 0)$	1	1
2	$k$	$(2\tau, 0, 0)$	113	$m(12)$
3	$c$	$(1 + 2\tau, 0, \tau)$	55	$2(26)$
4	$c$	$(1 + 2\tau, 0, \tau)$	66	$\overline{5}(5)$
5	$a$	$(2 + 2\tau, 0, 0)$	113	$m(12)$
$k \rightarrow \text{infl}(k)$				
1	$K$	$(0, 0, 0)$	1	1

# F-тип



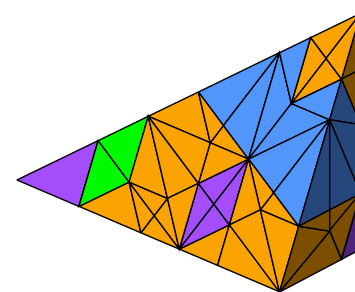
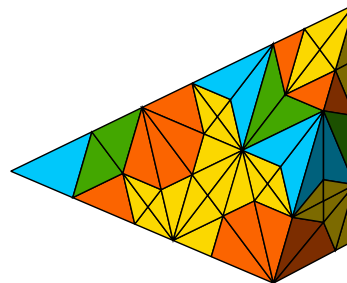
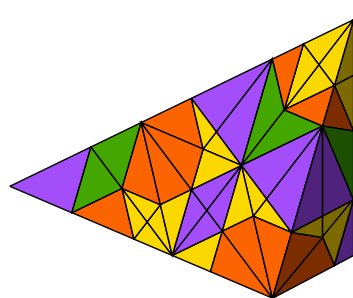
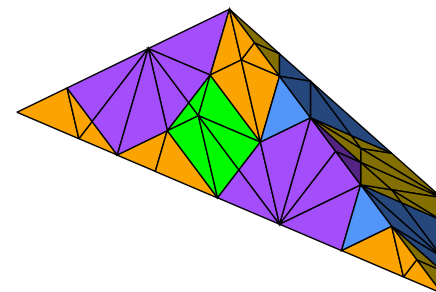
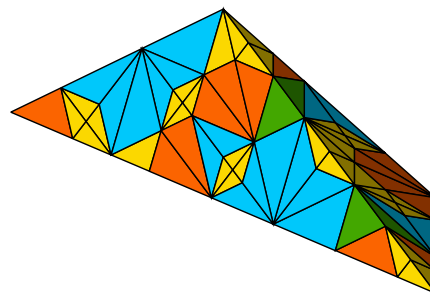
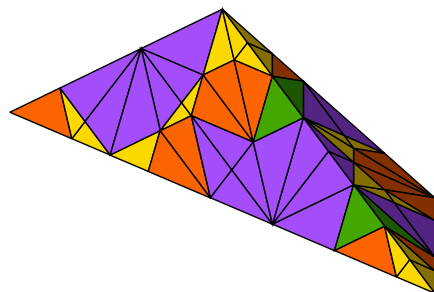
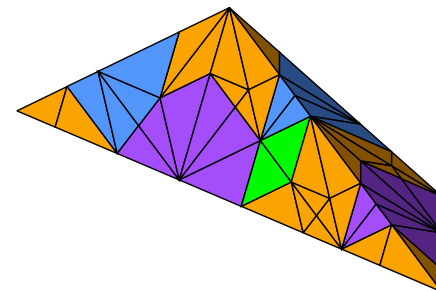
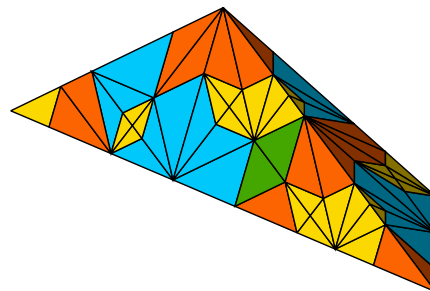
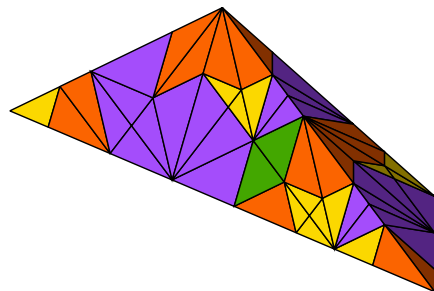
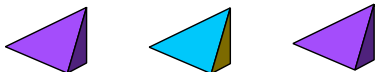
3

итерации



3

итерации





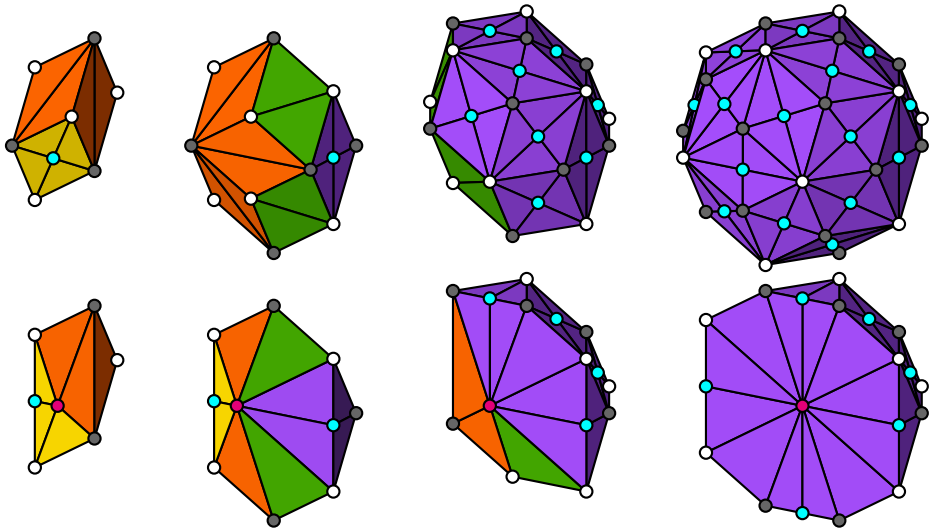
# Тетраэдры Данцера И ЗОНОЭДРЫ

○ A    ● B    ● C    ● F

*a, c, k, K*



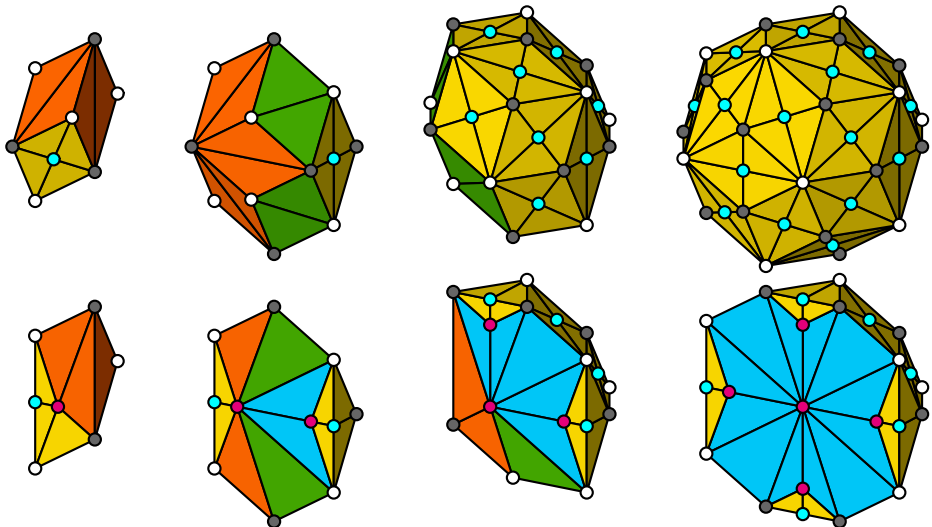
*I*



*a, b, c, k*

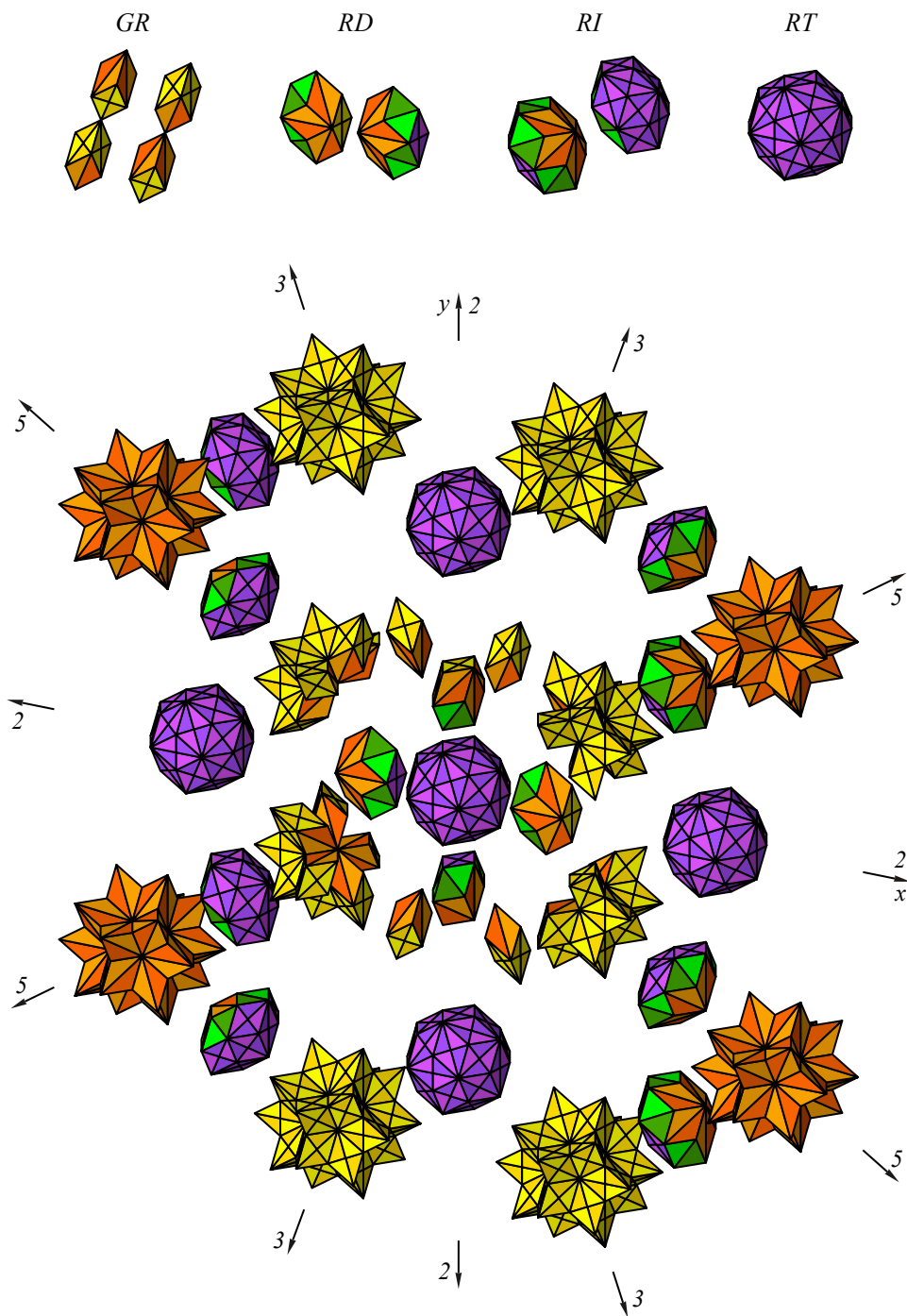


*F*

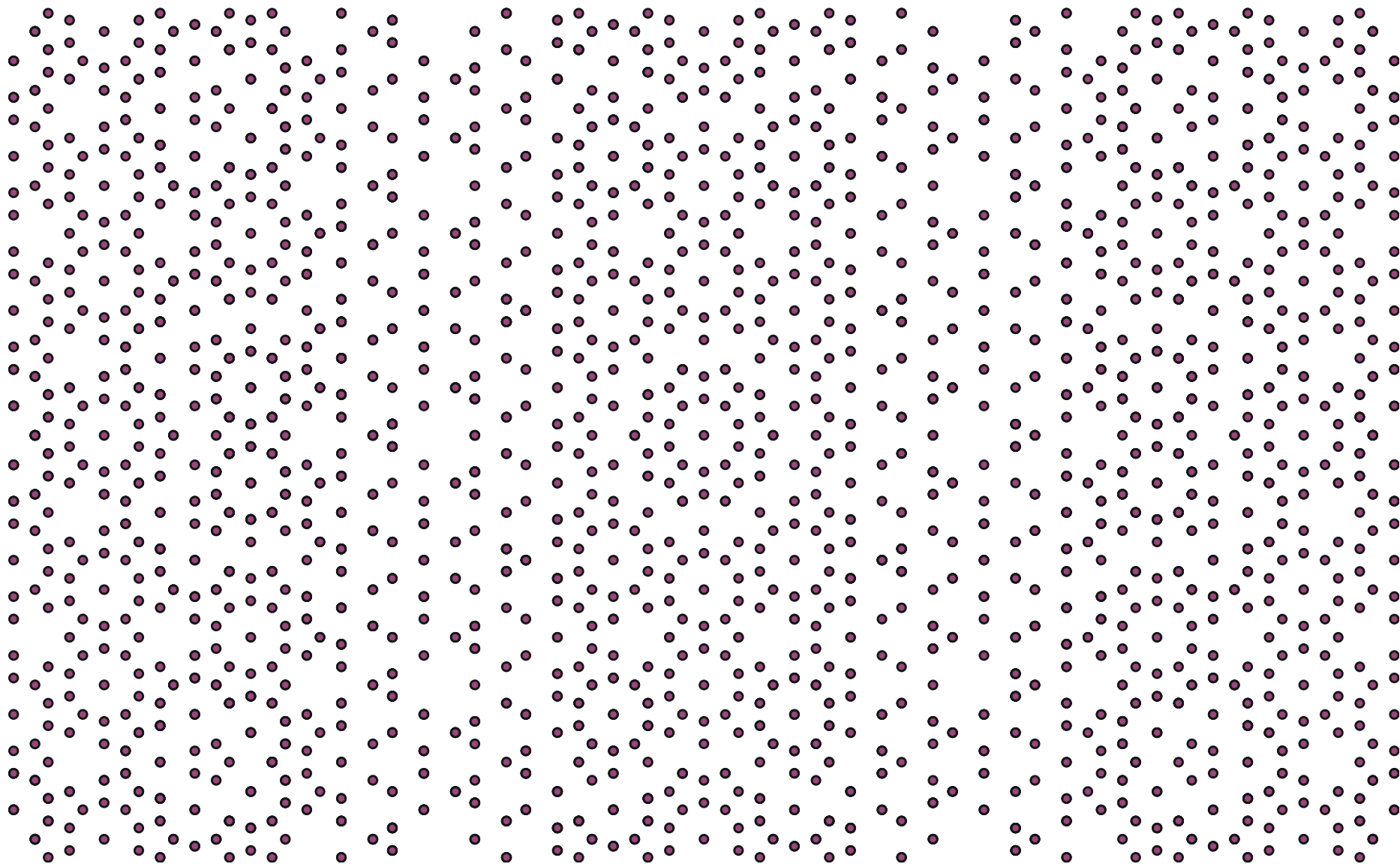


# Правила ПОДСТАНОВОК

## тетраэдр Данцера И ЗОНОЭДРЫ



# *Новый тип когерентных границ и модулярных структур*



# Octet truss

Alexander Graham Bell (~1900); Richard Buckminster Fuller (~1950)

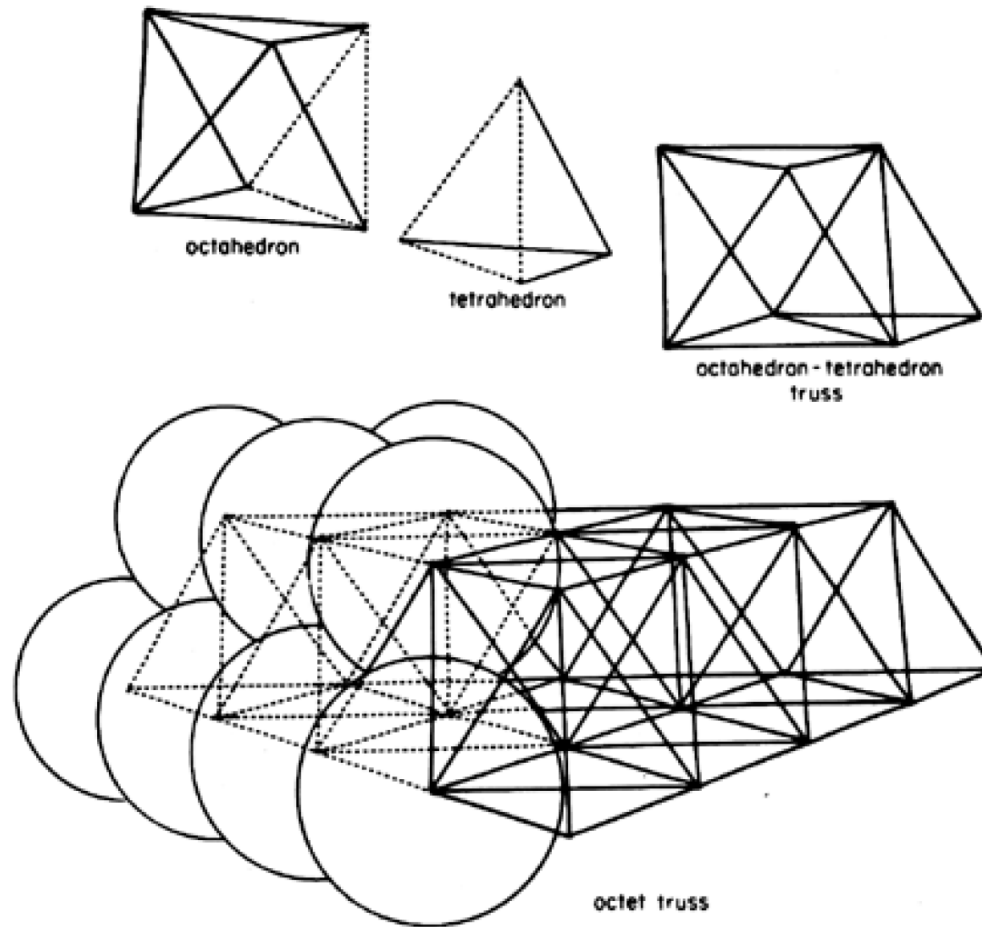


Fig. 420.01 Octet Truss.

# Гипотеза Кеплера

## A proof of the Kepler conjecture

By THOMAS C. HALES\*

*To the memory of László Fejes Tóth*

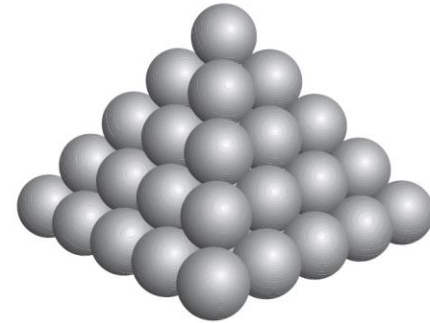


Figure 1.1: The face-centered cubic packing

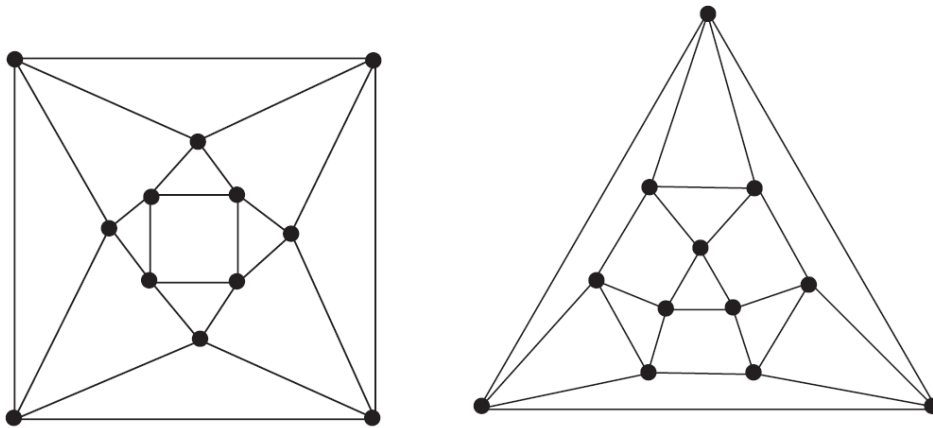


Figure 1.2: The plane graphs  $G_{\text{fcc}}$  and  $G_{\text{hcp}}$

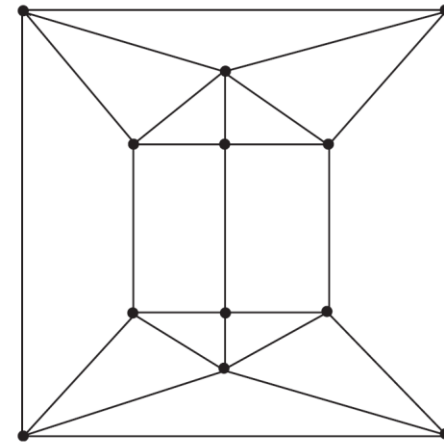
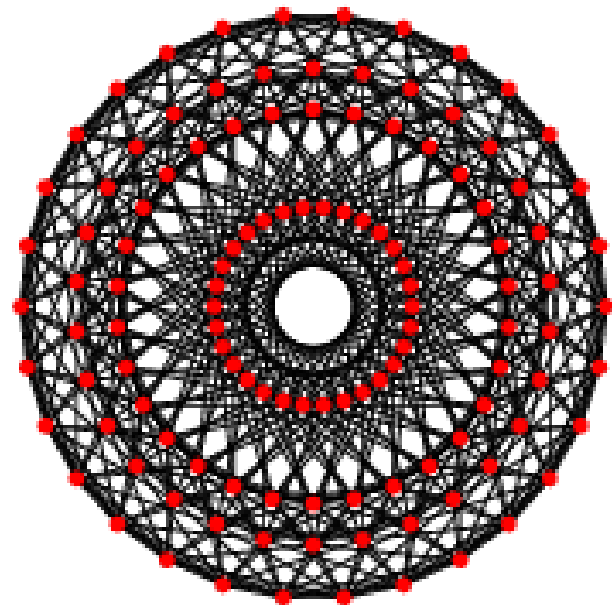
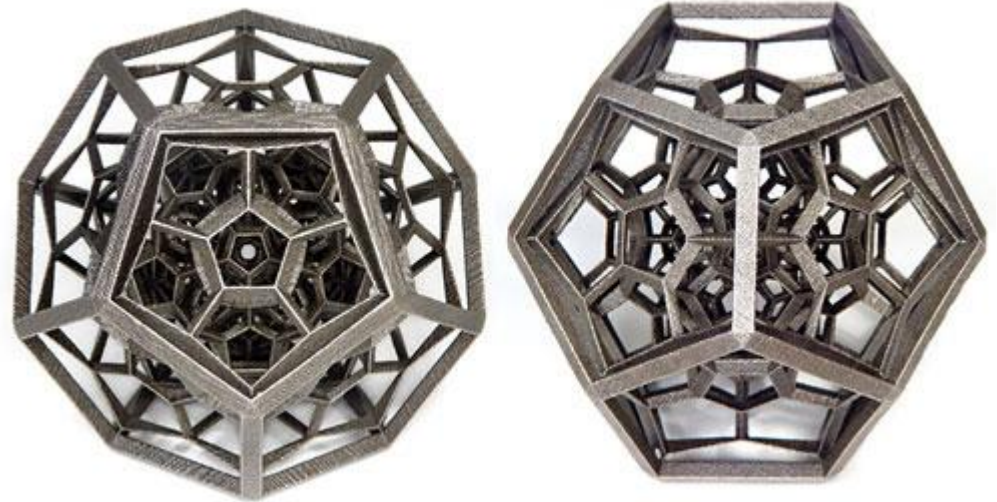
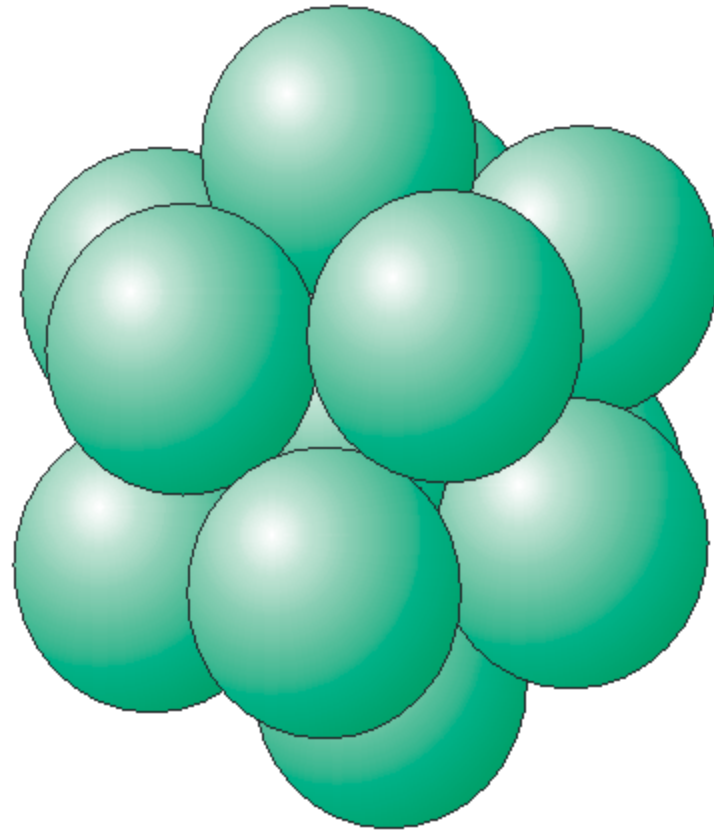
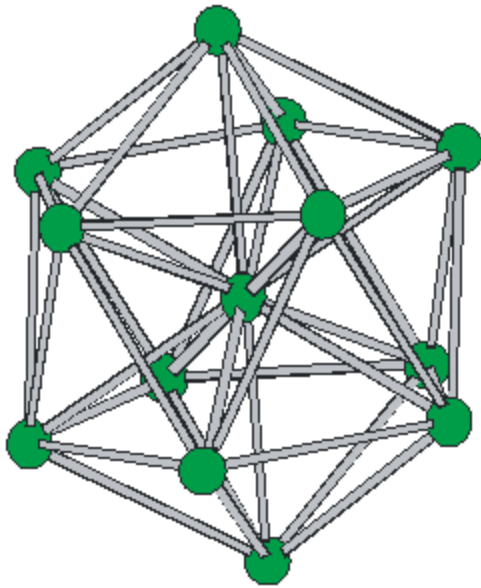


Figure 1.3: The plane graph  $G_{\text{pent}}$  of the pentahedral prism.

# *H.S.M. Coxeter*

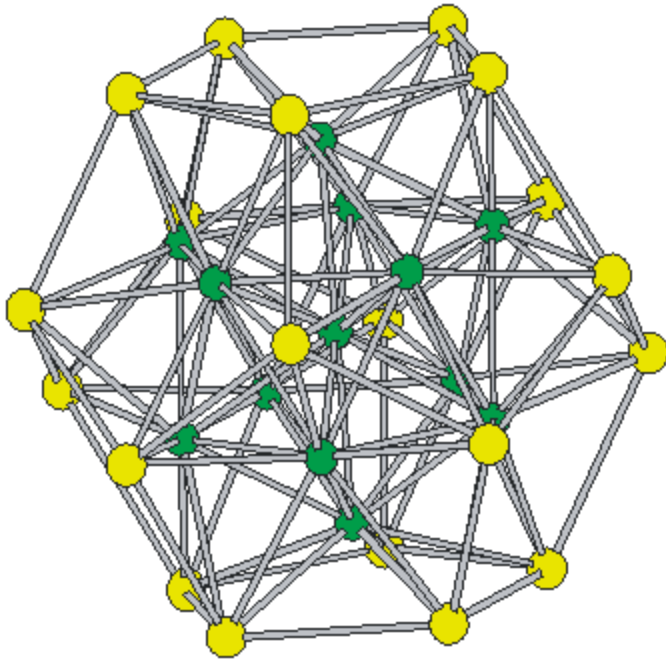


# Polytope {3,3,5} - icosahedral packing

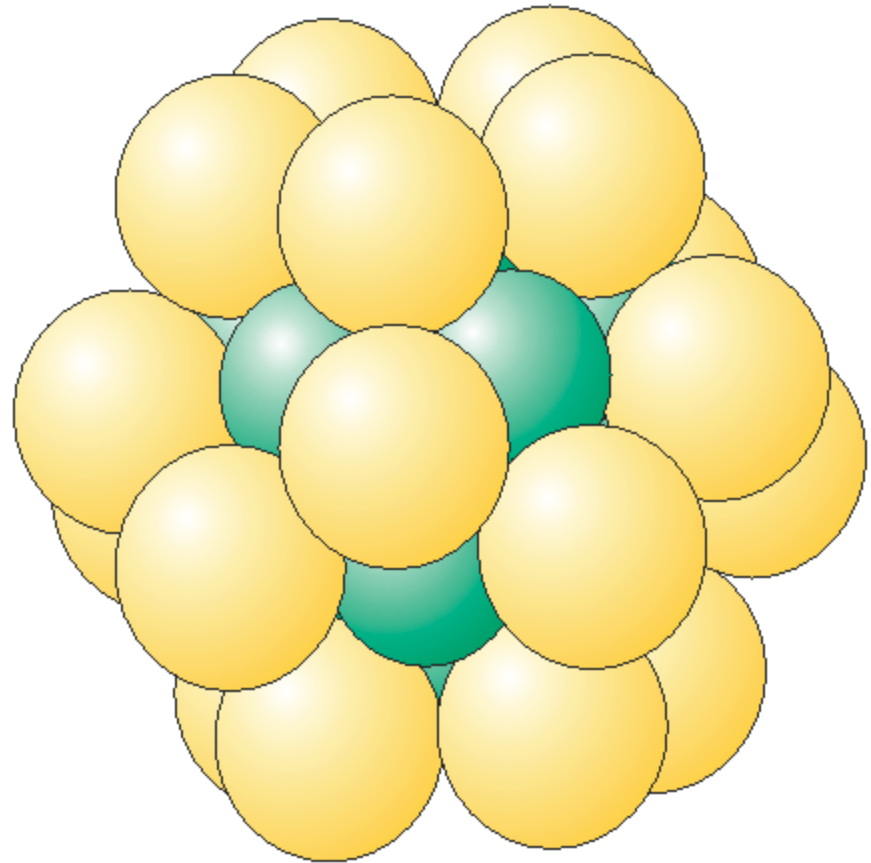


$1_0, 2_0$

# Multilayer icosahedral packing

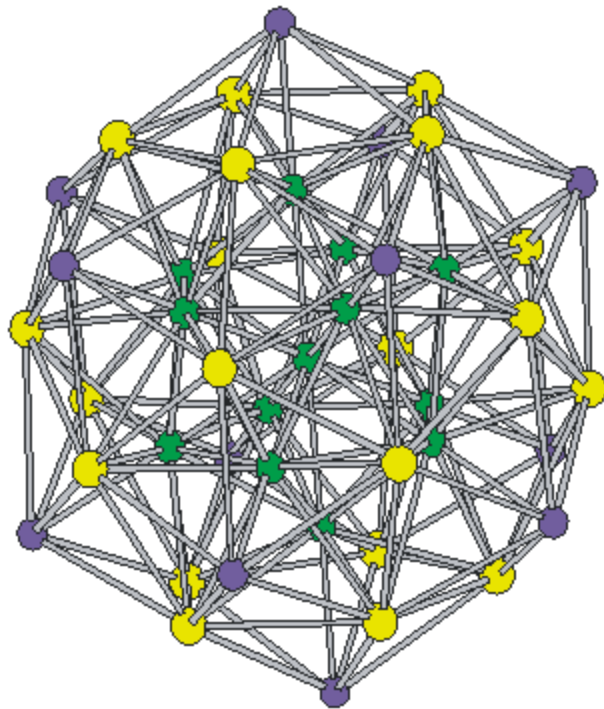


$1_0, 2_0, 3_0$

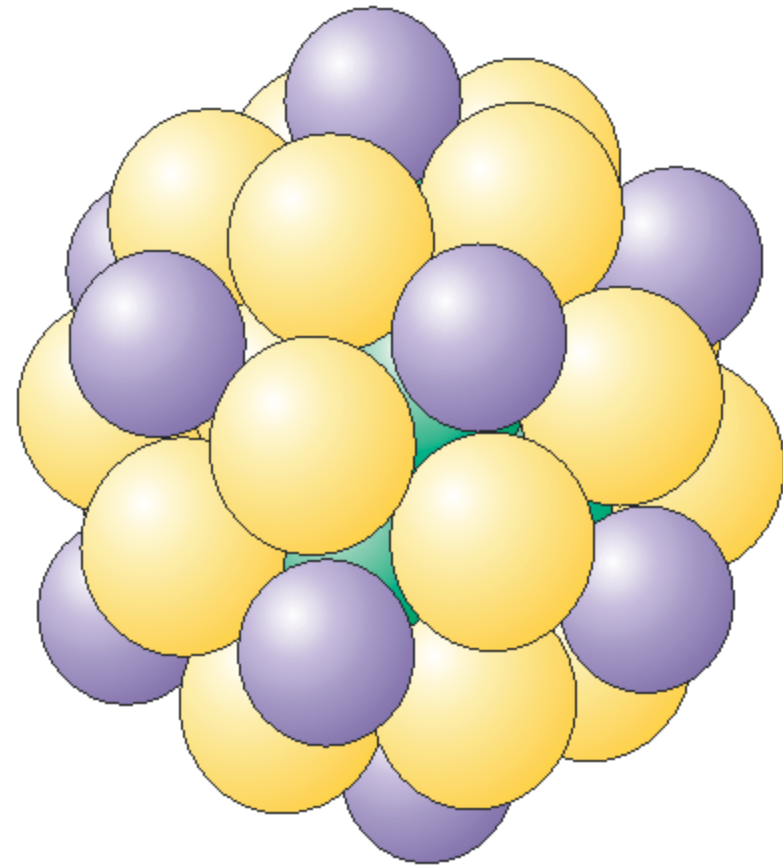




# Multilayer icosahedral packing



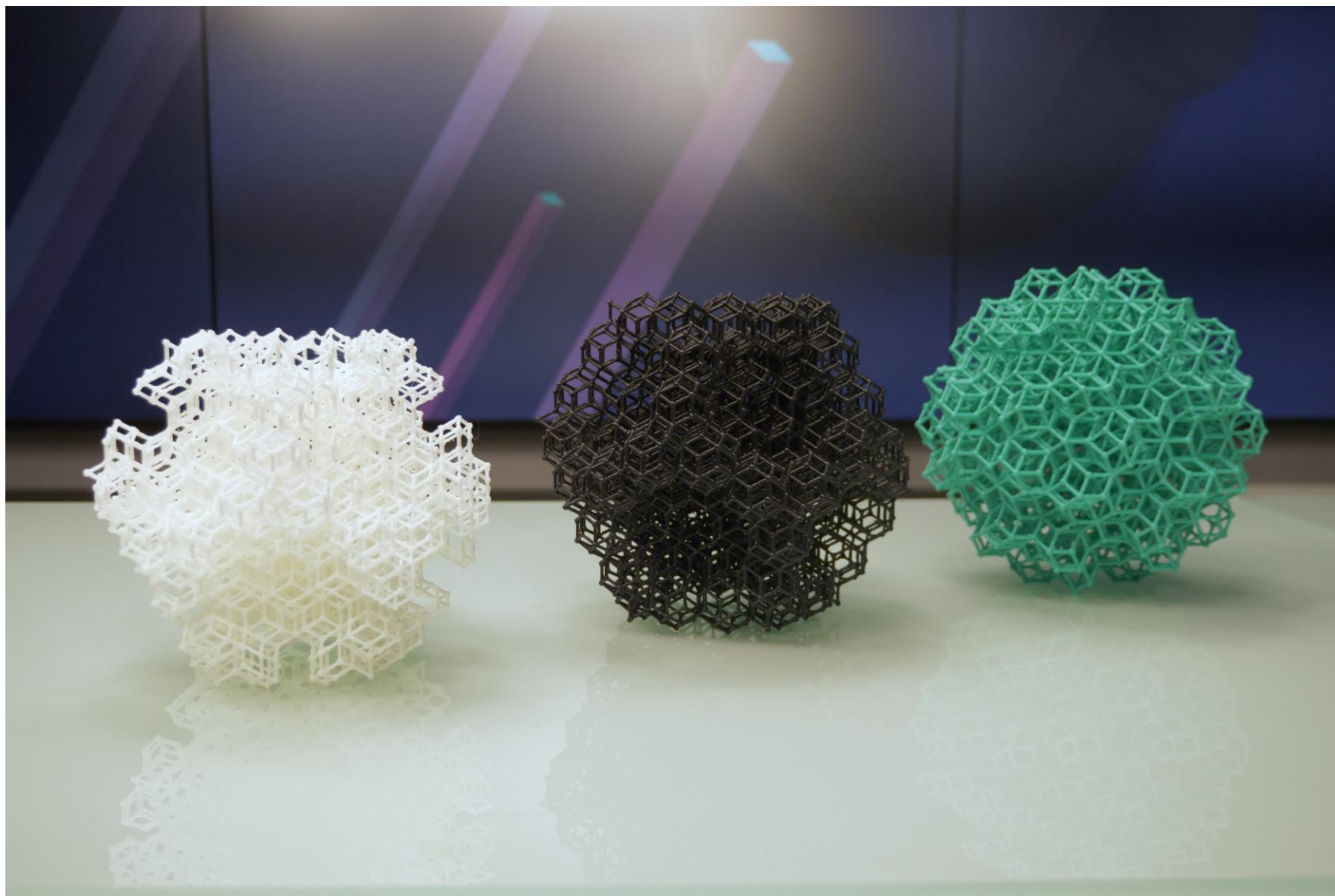
$1_0, 2_0, 3_0, 4_0$



## ВЫВОДЫ

1. Обеспечивается описание икосаэдрических квазикристаллов всех трех типов:  $P$ ,  $I$ ,  $F$ .
2. Строго соблюдается икосаэдрическая симметрия.
3. Не нарушается самоподобие упаковок; масштабный множитель всегда равен кубу золотого сечения.
4. Доказано, что в любой икосаэдрической упаковке существует в точности 3 типа характерных кластеров, при этом эквивалентные узлы всегда заполняются одинаковыми кластерами. (!)
5. Показана возможность описания структур с группами симметрии  $I_h$  и  $I$  и доказана возможность существования энантиоморфизма.

## Иерархические каркасы на основе икосаэдрических квазикристаллов



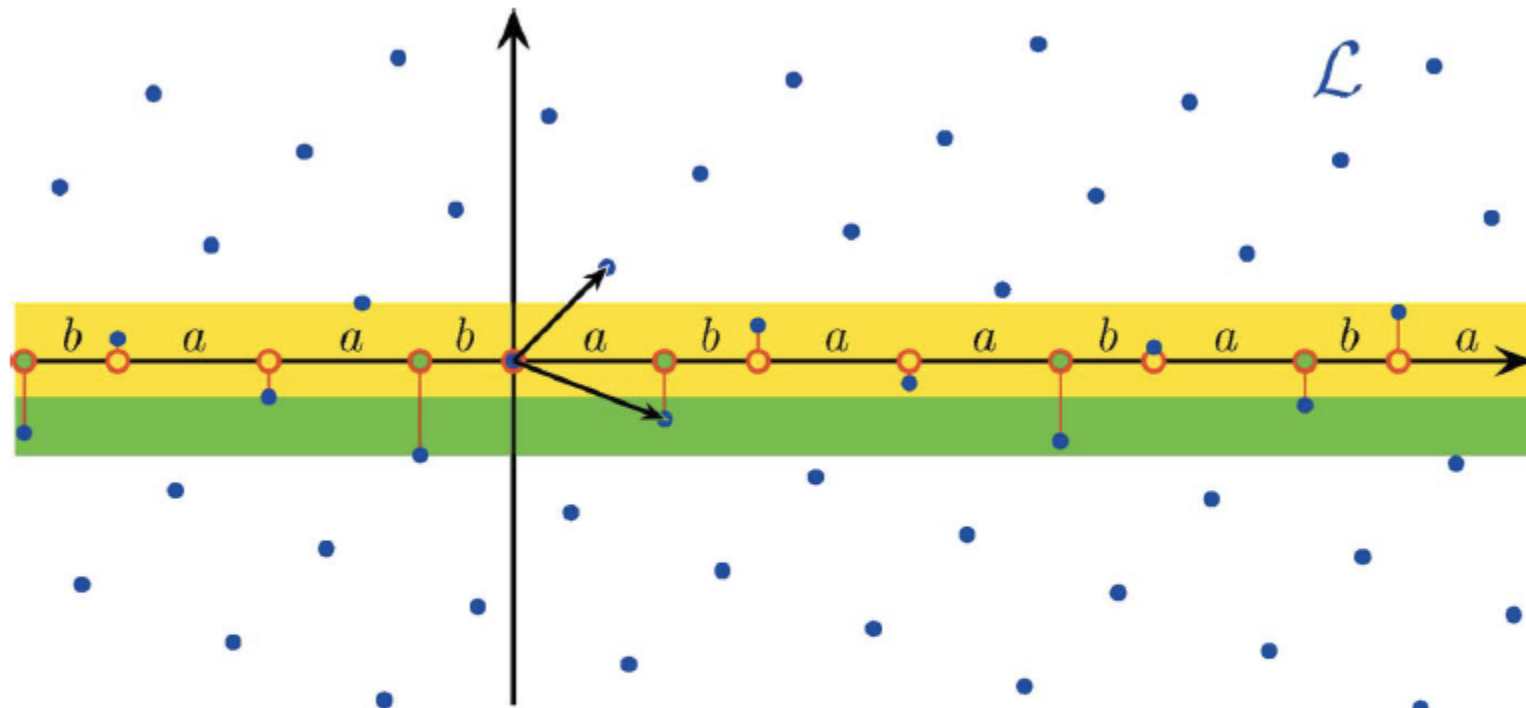
# Перспективы в структурном анализе, фотонике, стелс-технологиях и криптографии





## Inflation versus projection sets in aperiodic systems: the role of the window in averaging and diffraction

Michael Baake<sup>a,c</sup> and Uwe Grimm<sup>b,c,\*</sup>

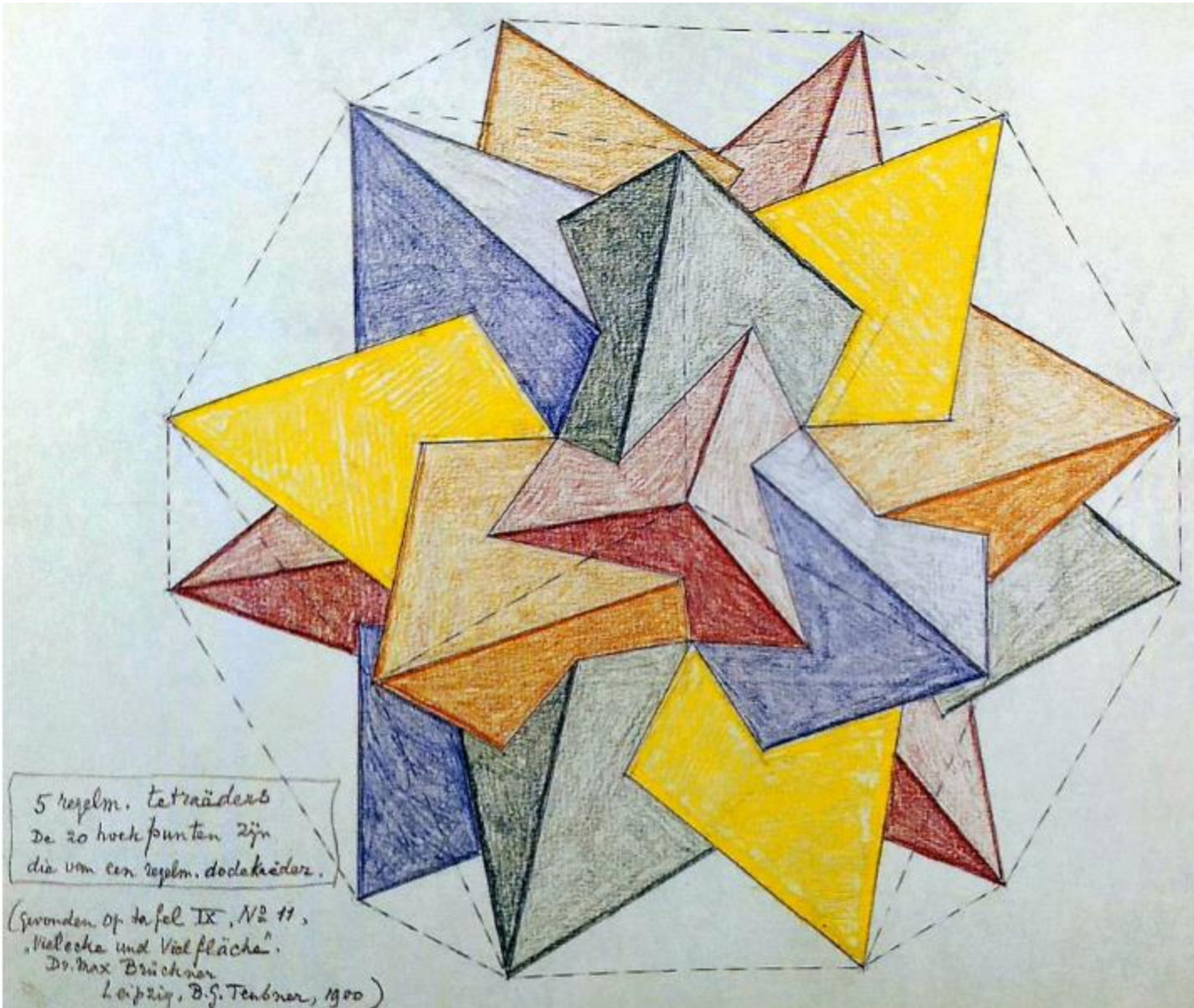


**Figure 1**

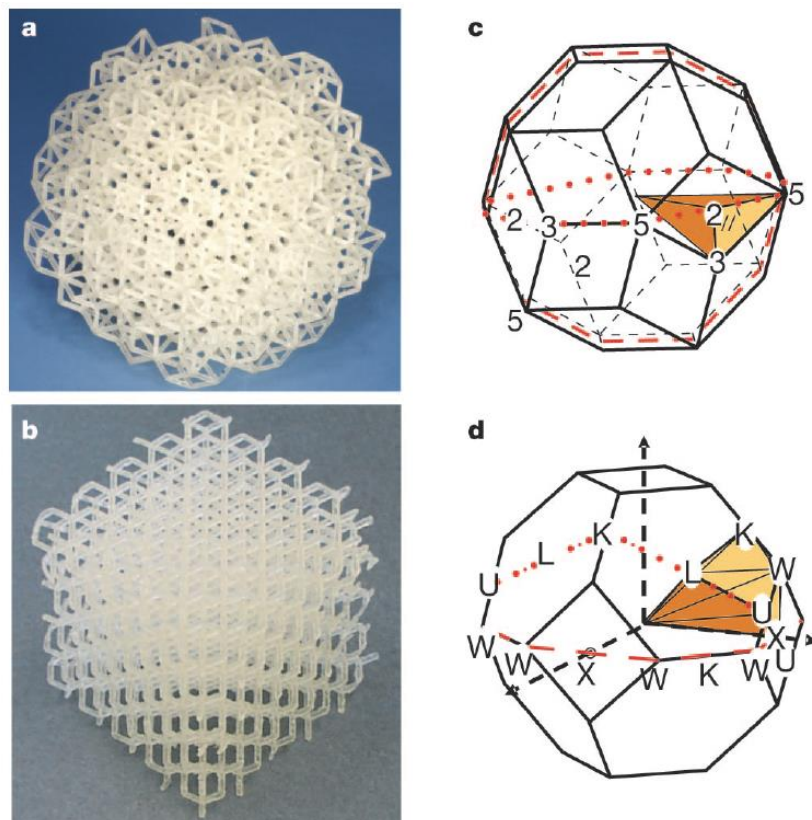
Cut-and-project description of the Fibonacci chain from the lattice  $\mathcal{L}$  (blue dots). The windows  $W_a$  and  $W_b$  are the cross sections of the yellow and green strips, respectively.

# Enantiomorphism

# M.C. Escher. Five tetrahedra



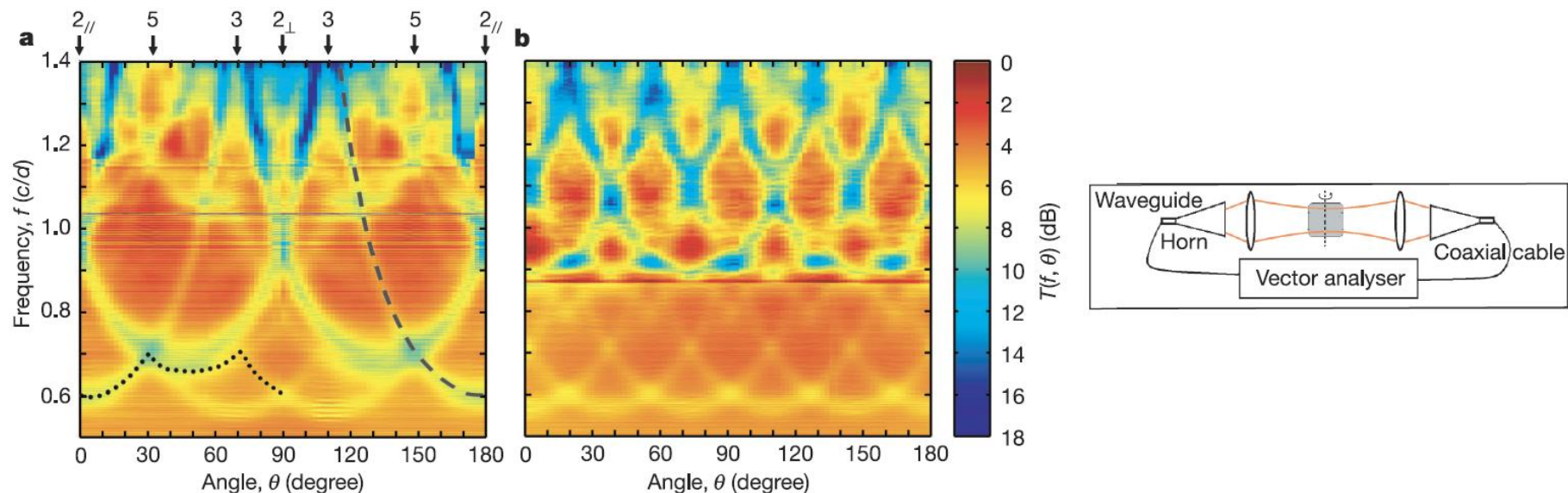
Weining Man, Mischa Megens, Paul J. Steinhardt, P.M. Chaikin,  
Experimental measurement of the photonic properties of icosahedral quasicrystals,  
*Nature*, **436**, 993–996 (2005)



**Figure 1 | Experimental photonic structures and their Brillouin zones.**  
**a**, Stereolithographically produced icosahedral quasicrystal with 1-cm-long rods. **b**, Diamond structure with 1-cm-long rods. **c**, Triacontahedron, one of several possible effective Brillouin zones with icosahedral symmetry. **d**, Brillouin zone for the f.c.c./diamond structure.

Steinhardt *et al.*, 2005

## Experimental measurement of the photonic properties of icosahedral quasicrystals

Weining Man<sup>1,2</sup>, Mischa Megens<sup>3</sup>, Paul J. Steinhardt<sup>1</sup> & P. M. Chaikin<sup>1,2,4</sup>

**Figure 2** | Measured transmission for an icosahedral quasicrystal. **a**,  $T(f, \theta)$ , transmission as a function of frequency (measured in units of  $c/d$ ) and angle, for a rotation about a two-fold rotation axis of the quasicrystal (corresponding to the dotted line in Fig. 1c) using two overlapping

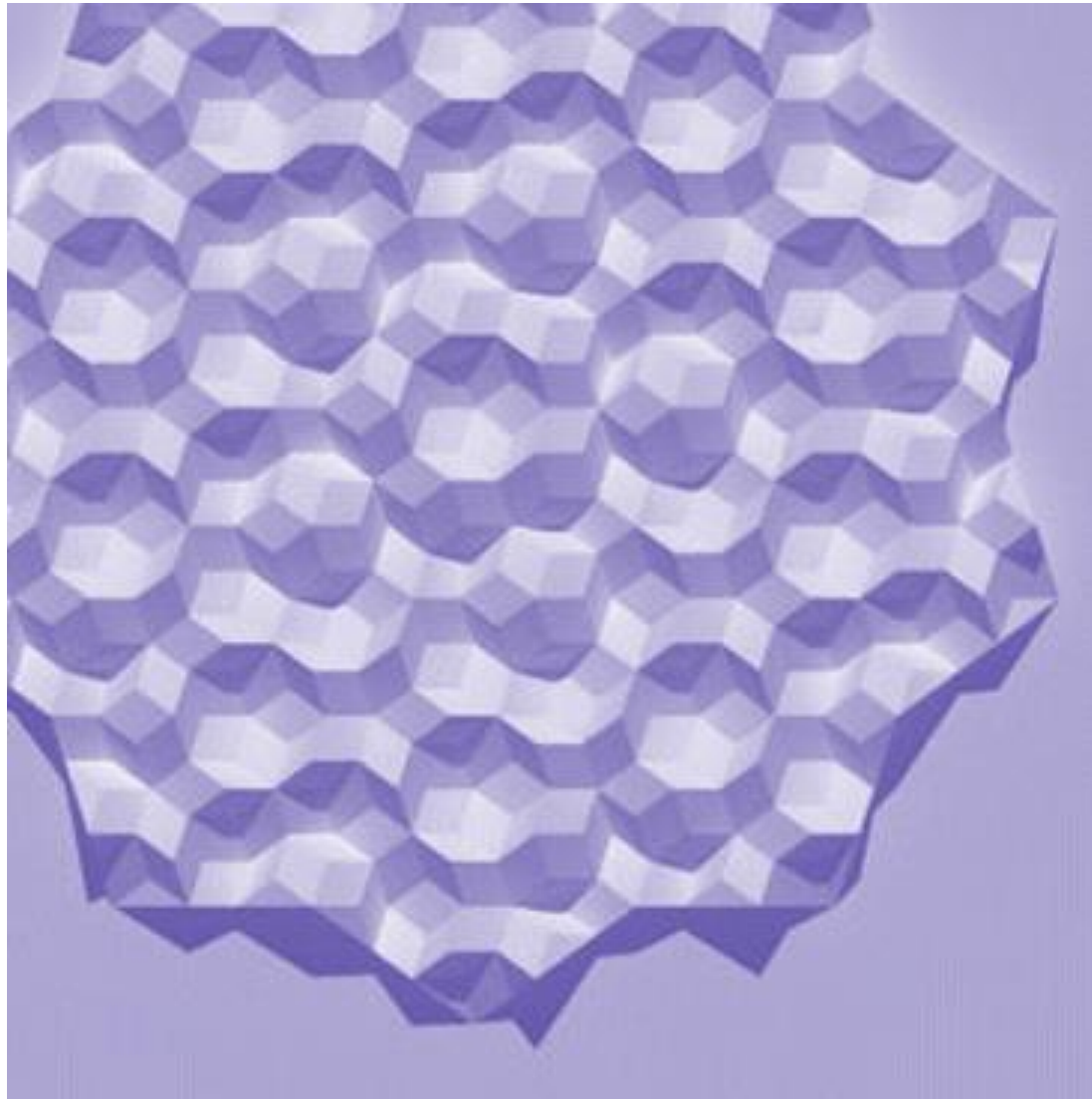
frequency bands. The dashed line is a  $1/\cos\theta$  curve characteristic of Bragg scattering from a Brillouin zone face. **b**,  $T(f, \theta)$  for a rotation about a five-fold rotation axis corresponding to the dashed line in Fig. 1c. Inset, schematic of the microwave horn and lens arrangement used for these measurements.



Rima Ajlouni,

Quasi-periodic Geometry for Architectural Acoustics

*ENQUIRY: The ARCC Journal for Architectural Research*, 15, 42-61 (2018)



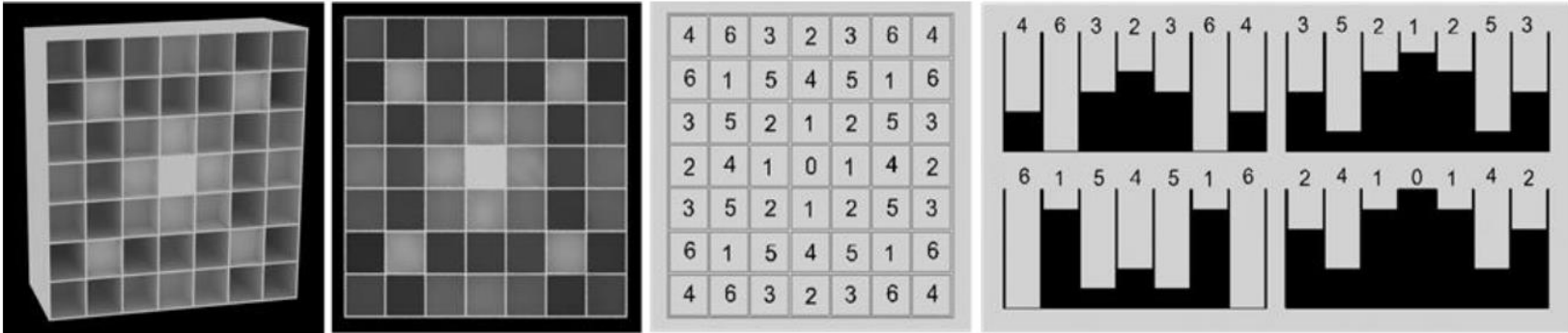


Figure 10 – 2D, N=7X7 Schroeder Quadratic Residue Diffuser.

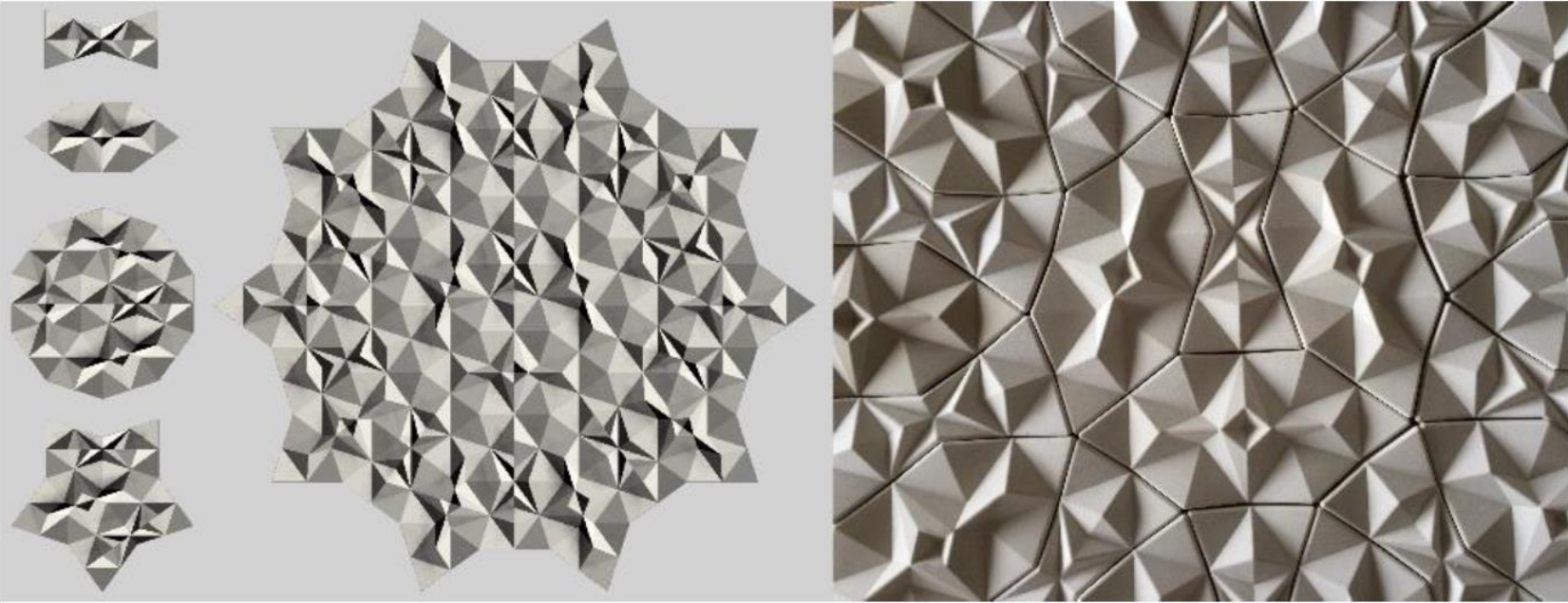
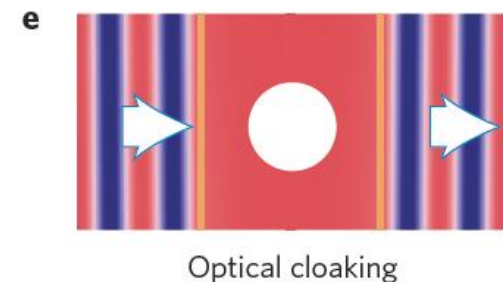
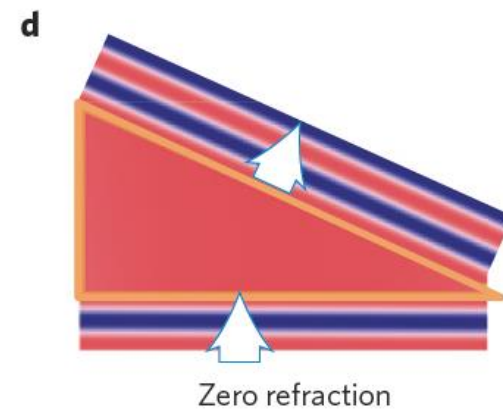
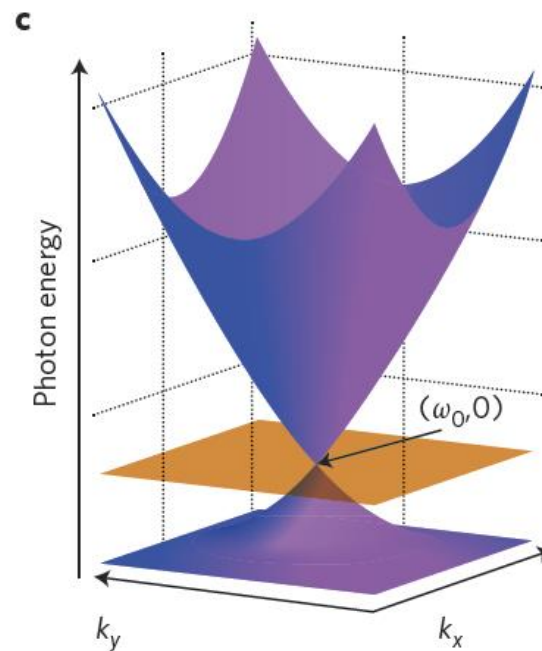
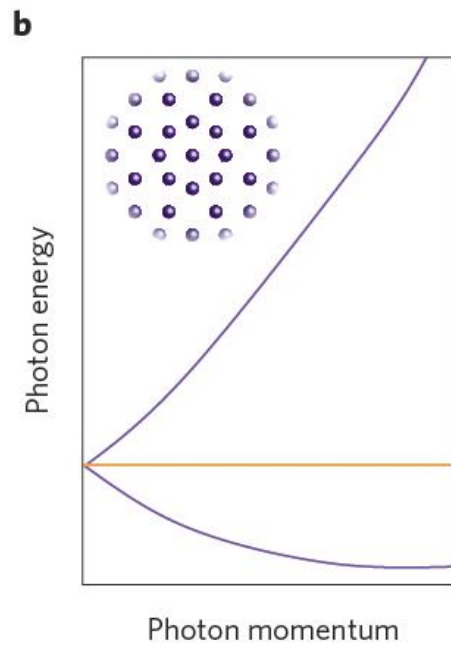
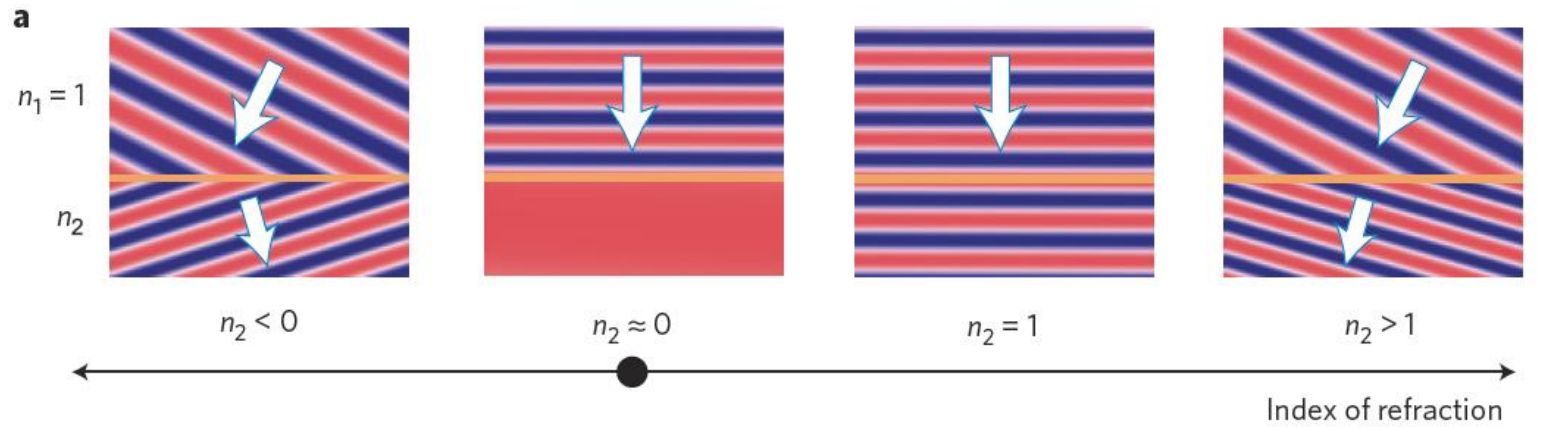


Figure 21 – 10-fold Quasi-periodic surface panel fabricated with porcelain slip casting method using two modular units.

Svetlana V. Boriskina,  
 Quasicrystals: Making invisible materials  
 Nature Photonics, **9**, 422-424 (2015)



Dirac cone at  $\mathbf{k} = 0$  caused by accidental degeneracy

*A.E. Madison*

**Constructing  
Penrose-like  
tilings  
with 7-fold  
symmetry**

*Structural  
Chemistry, 2018,  
29, 645-655.*

VOLUME 29, NUMBER 2

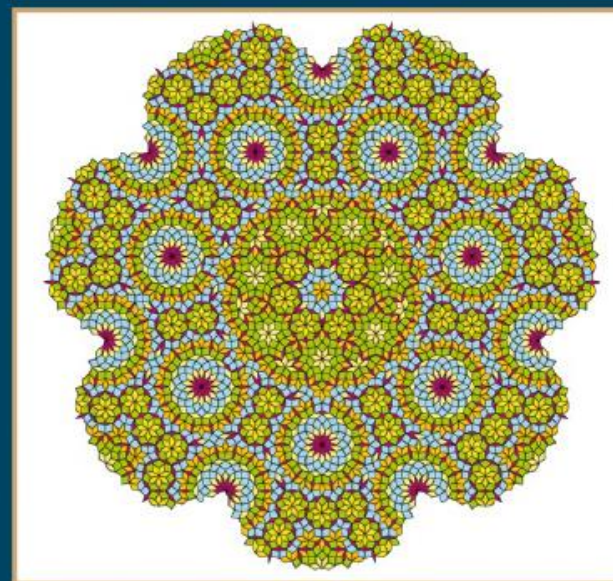
April 2018

29(2) 383–656 (2018)

ISSN 1040-0400

**STRUCTURAL  
CHEMISTRY**

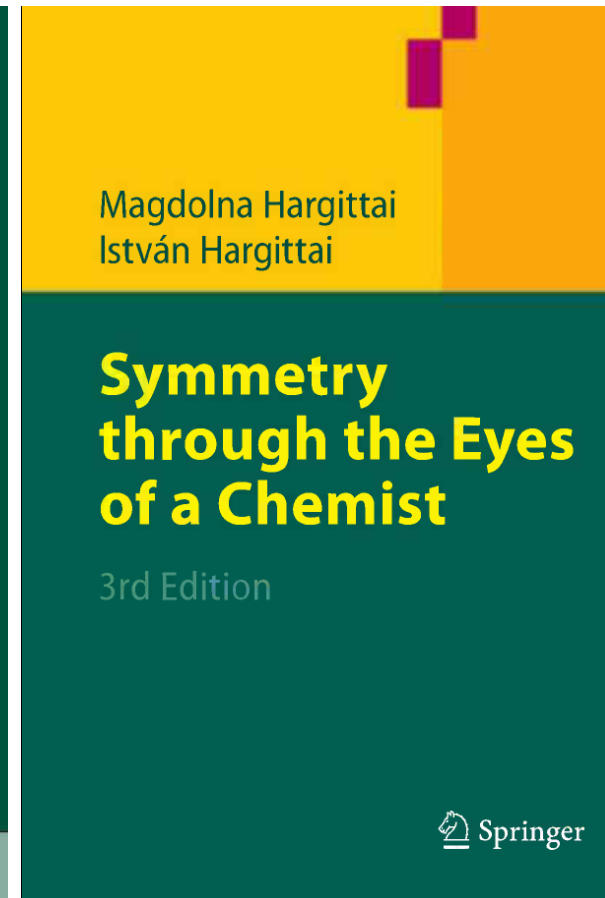
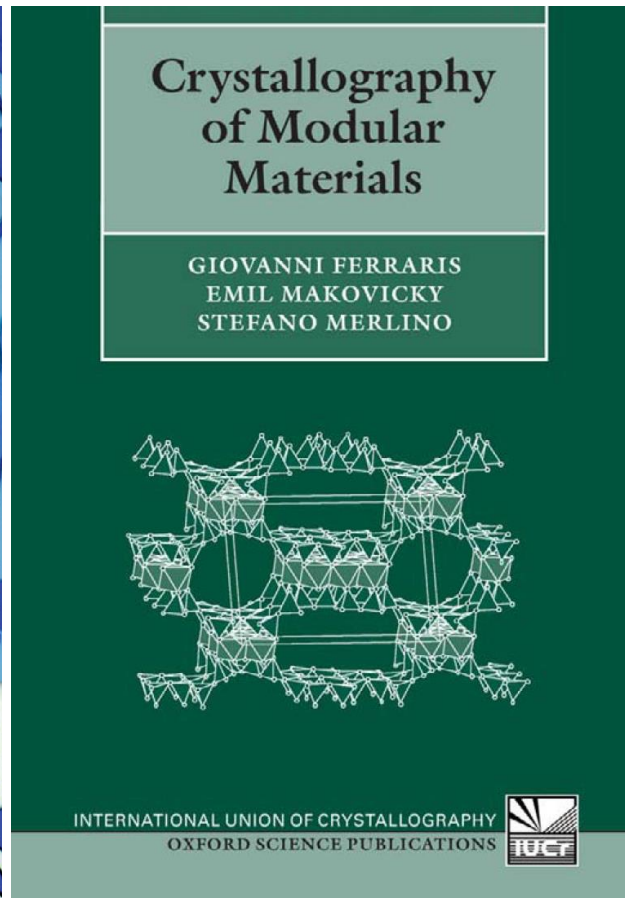
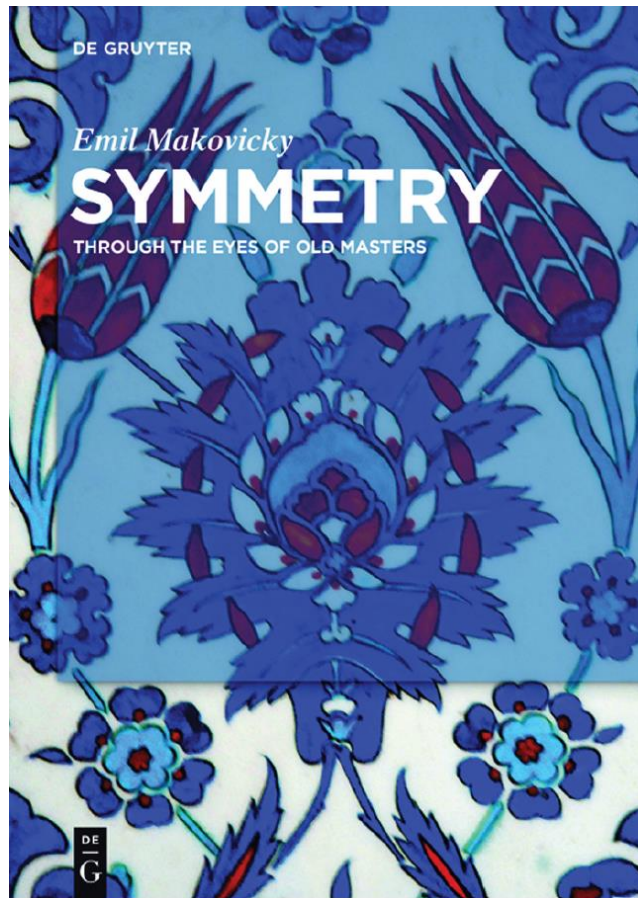
Computational and Experimental Studies of Chemical and Biological Systems



 Springer

Emil Makovicky

Istvan Hargittai



# Апериодические мозаики в архитектуре и искусстве



## Сквер

перед входом в здание  
математического факультета  
университета Оксфорда.

**Andrew Wiles Building**

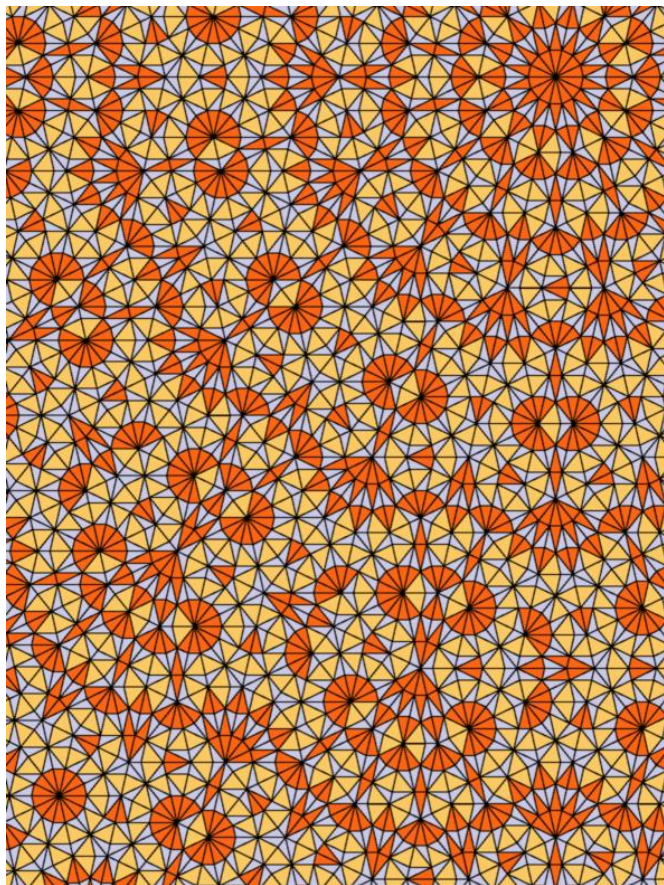
Оксфорд, Великобритания  
© Wikimedia Commons.

# Апериодические мозаики в архитектуре и искусстве



Мозаика у фонтана, Фец, Марокко  
иллюстрация из книги Е. Маковичку. Symmetry: Through the eyes of old masters, 2016

# Примеры разбиений 7-го порядка



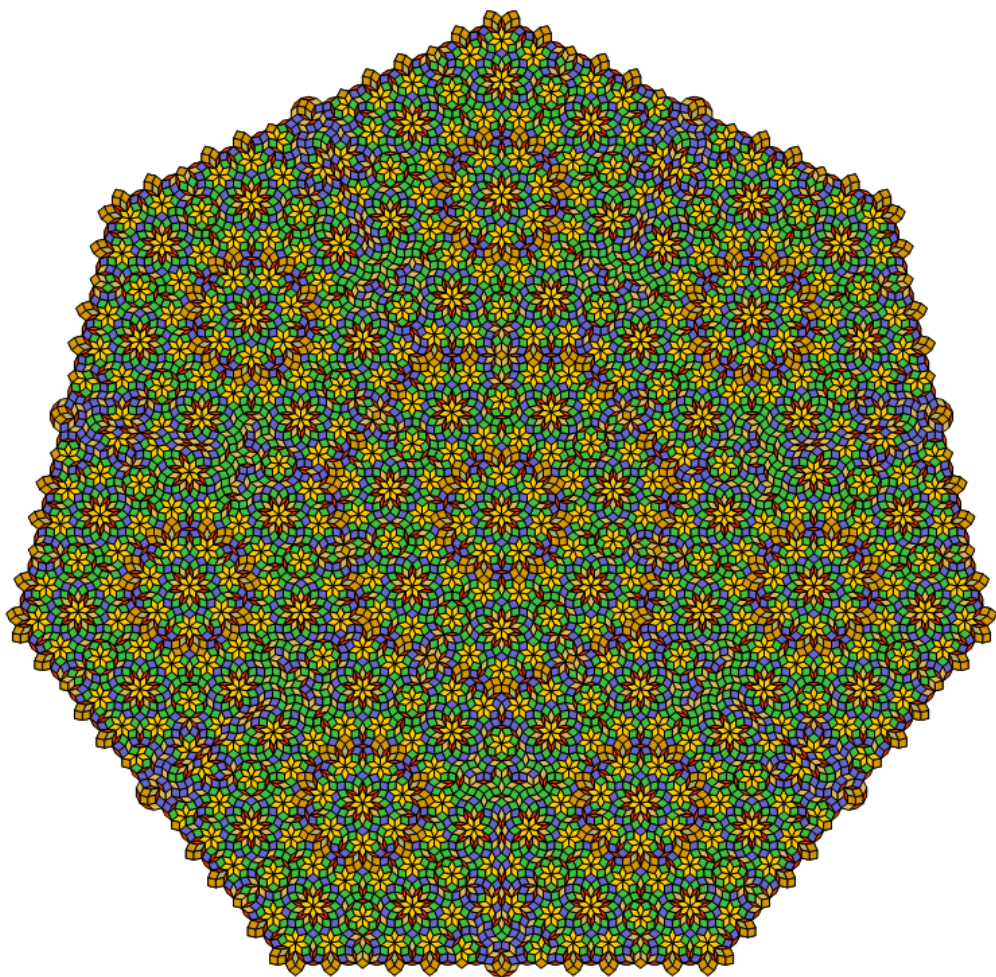
Ludwig Danzer, 1996



Alan Schoen, 1987



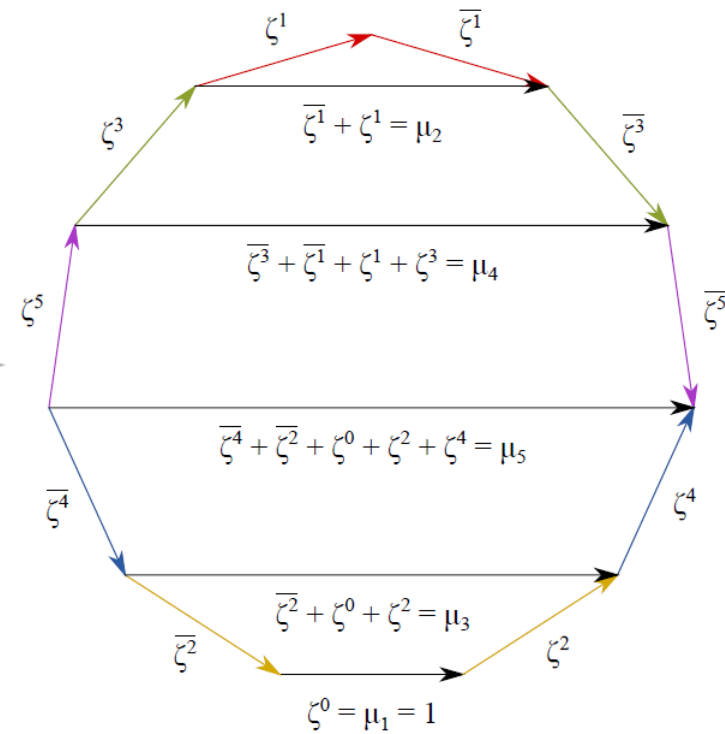
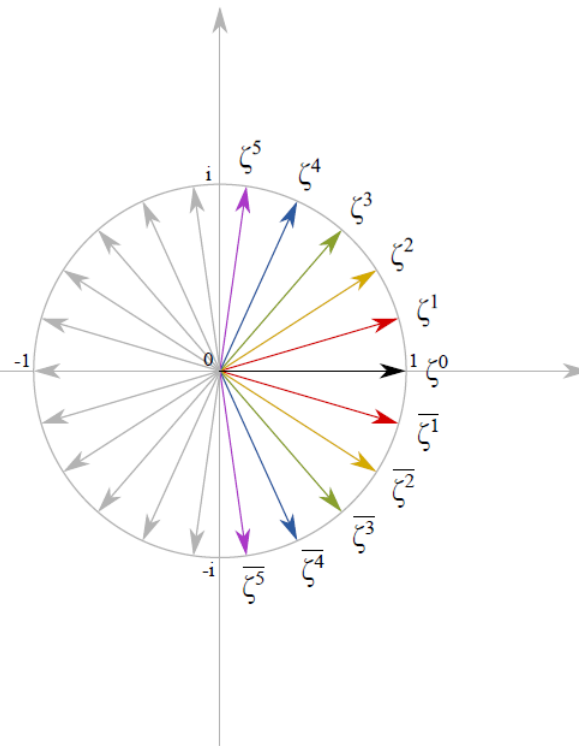
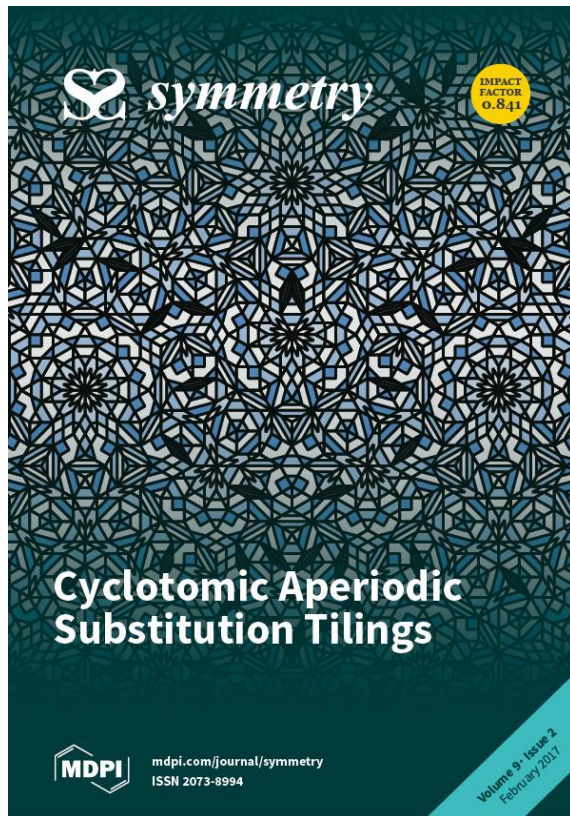
*Alan H. Schoen*  
**Geometry Garret**



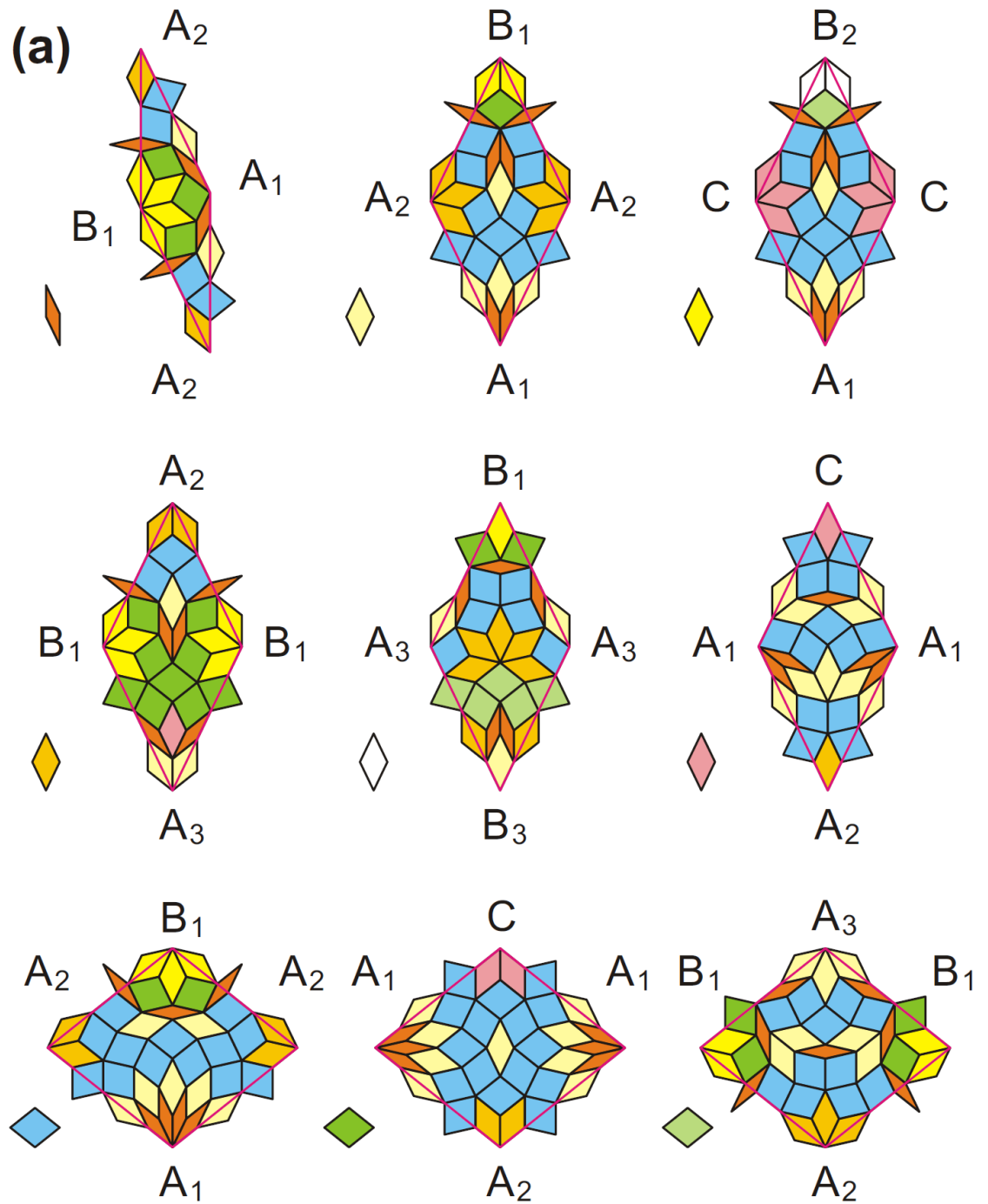
# Stefan Pautze

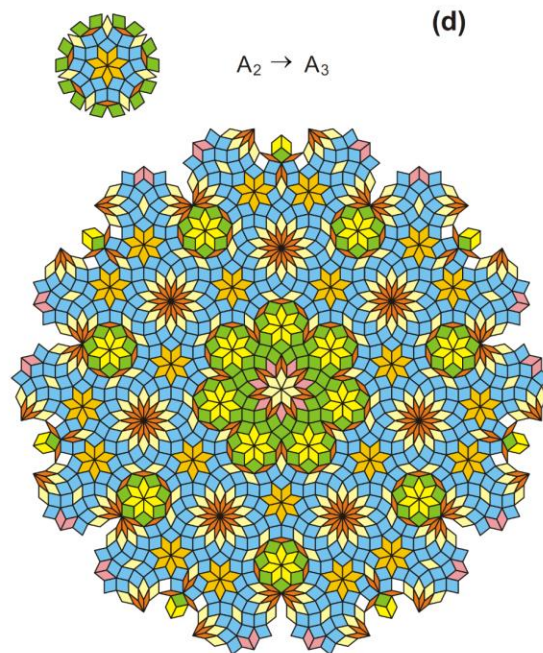
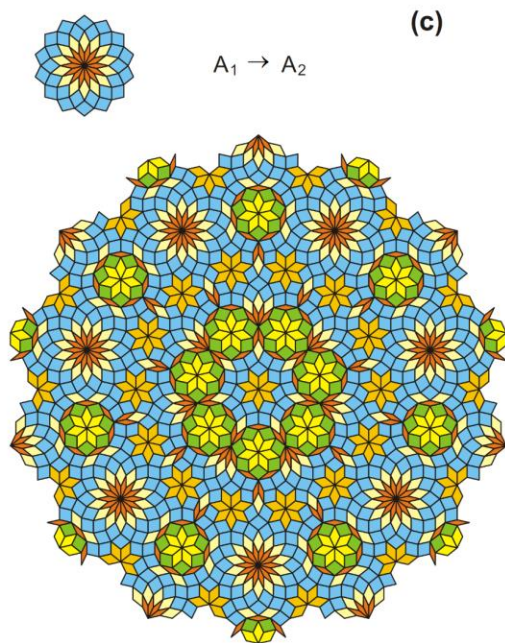
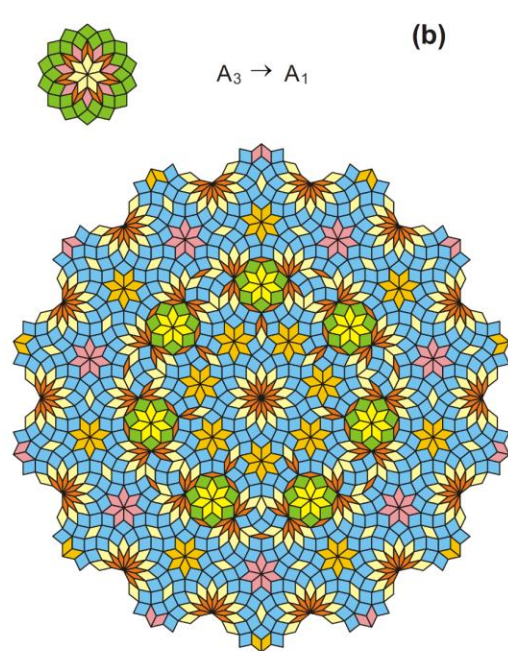
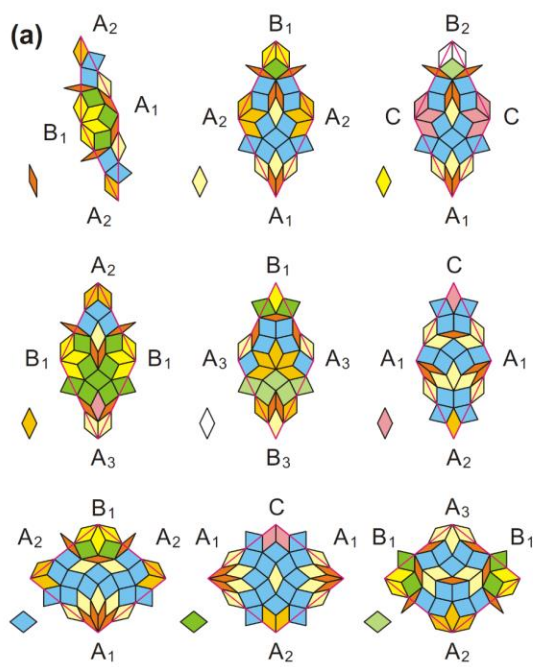
## Cyclotomic aperiodic substitution tilings

*Symmetry*, 2017, 9, #19.



7-fold

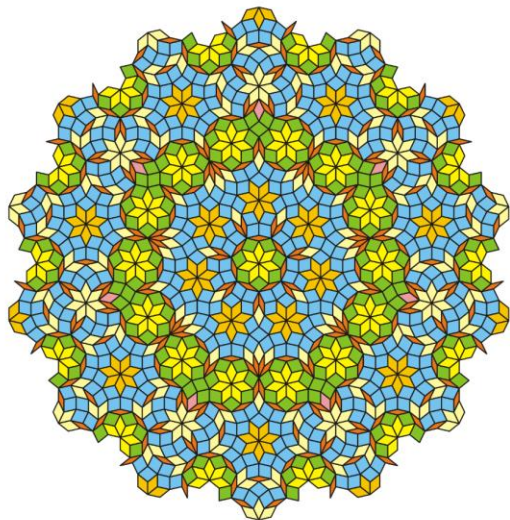






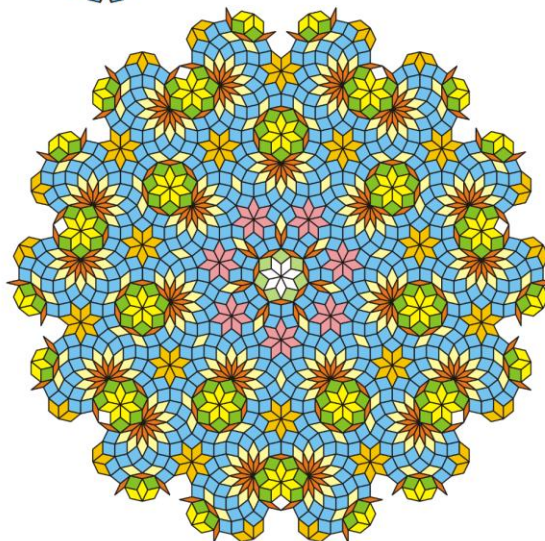
$B_3 \rightarrow B_1$

(a)



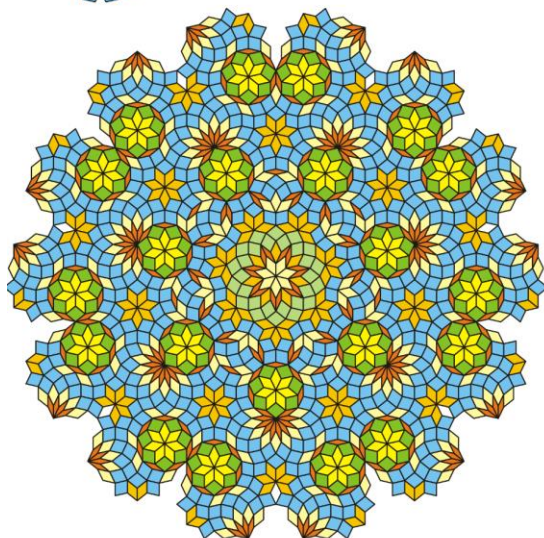
$B_1 \rightarrow B_2$

(b)



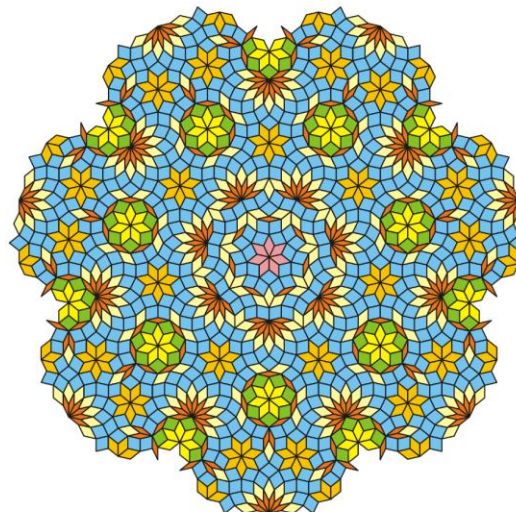
$B_2 \rightarrow B_3$

(c)

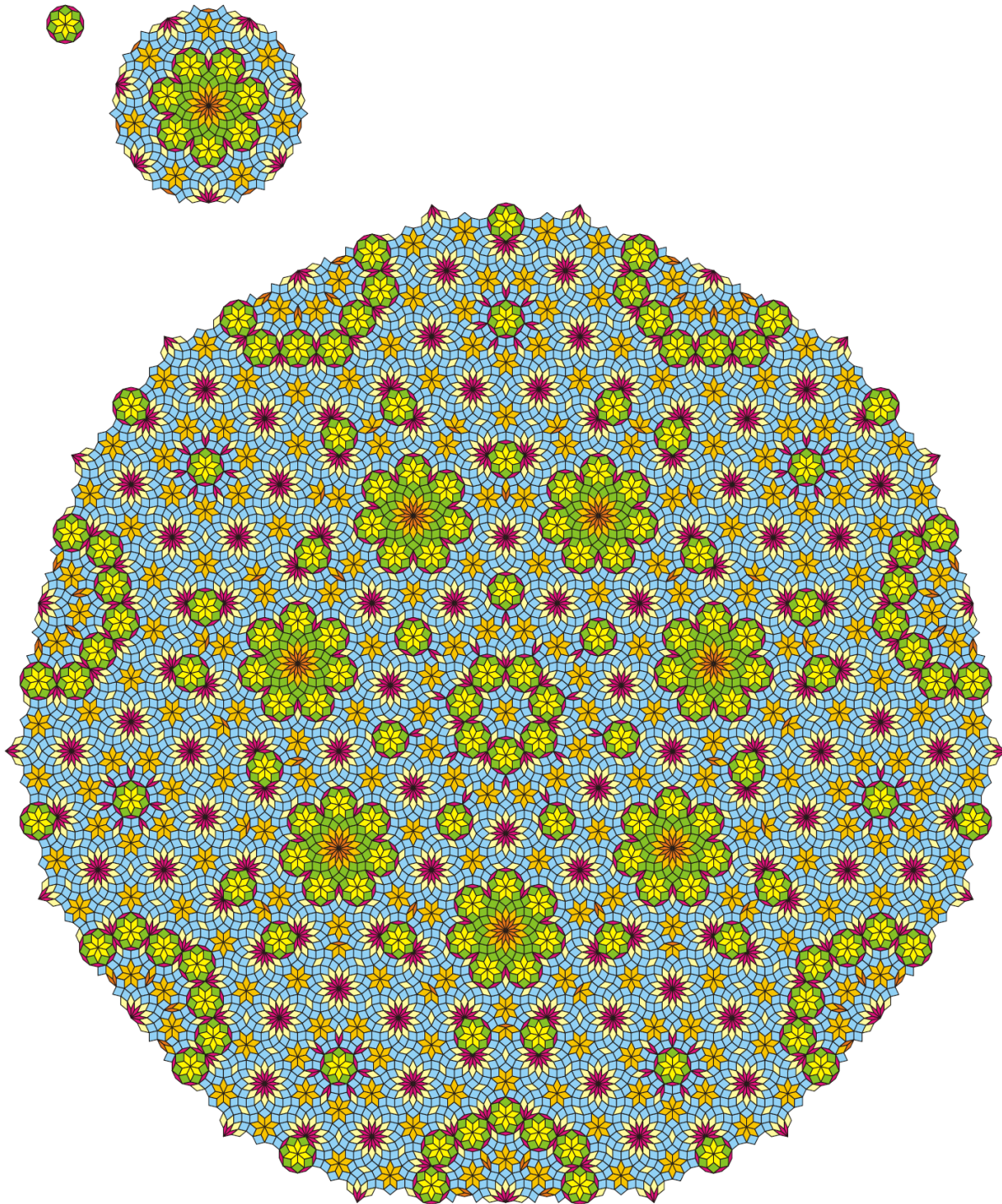


$C \rightarrow C$

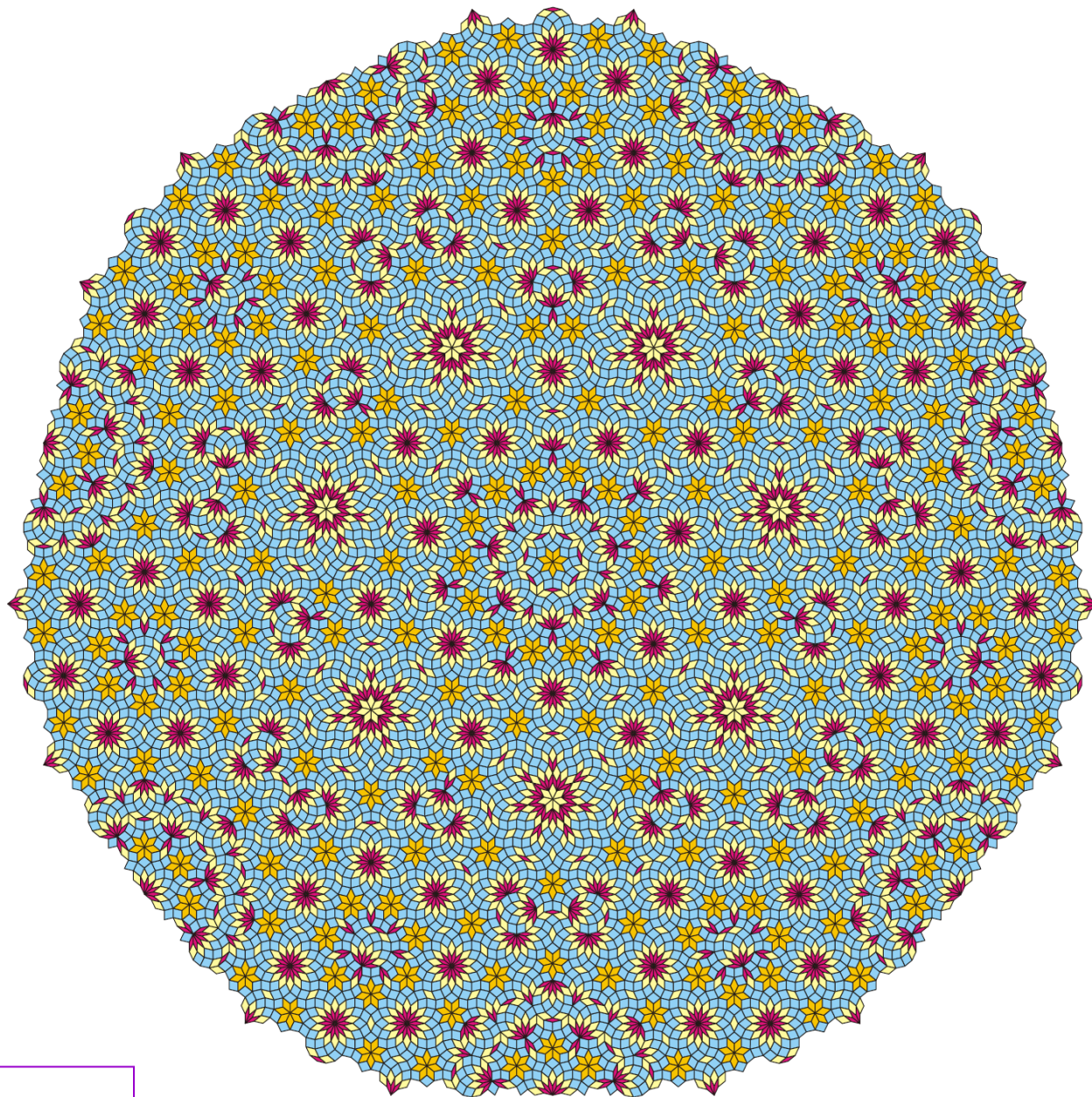
(d)



**7-fold**

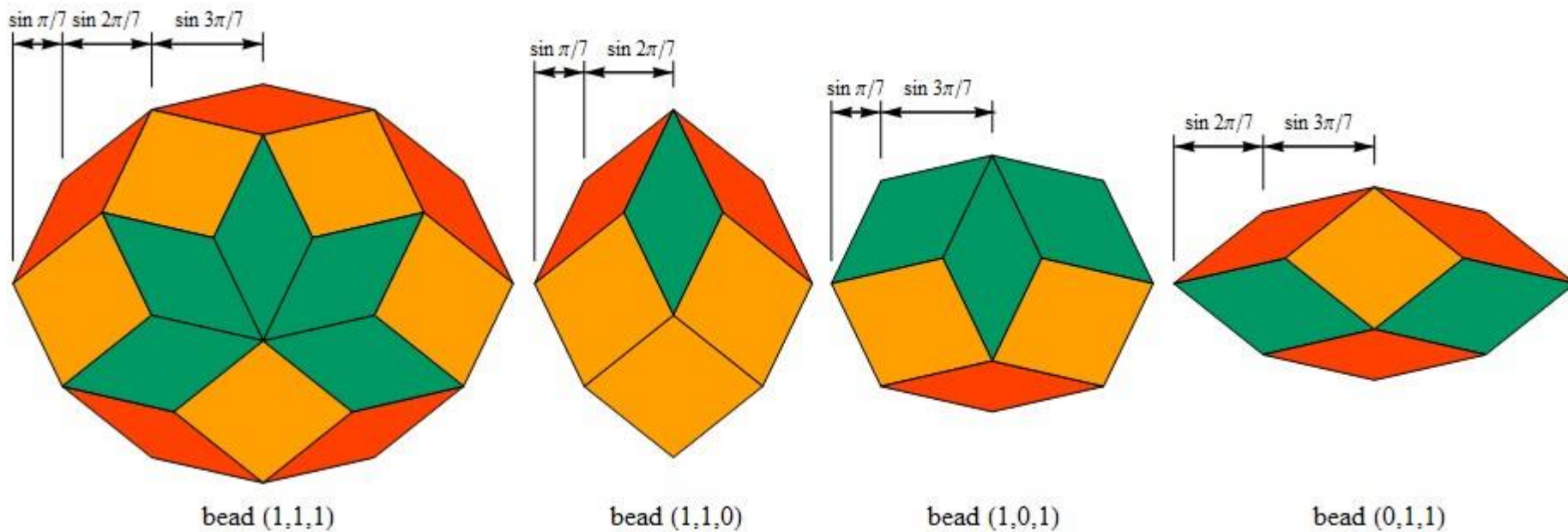


**7-fold**



ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ

# Ромбы или зоногены?





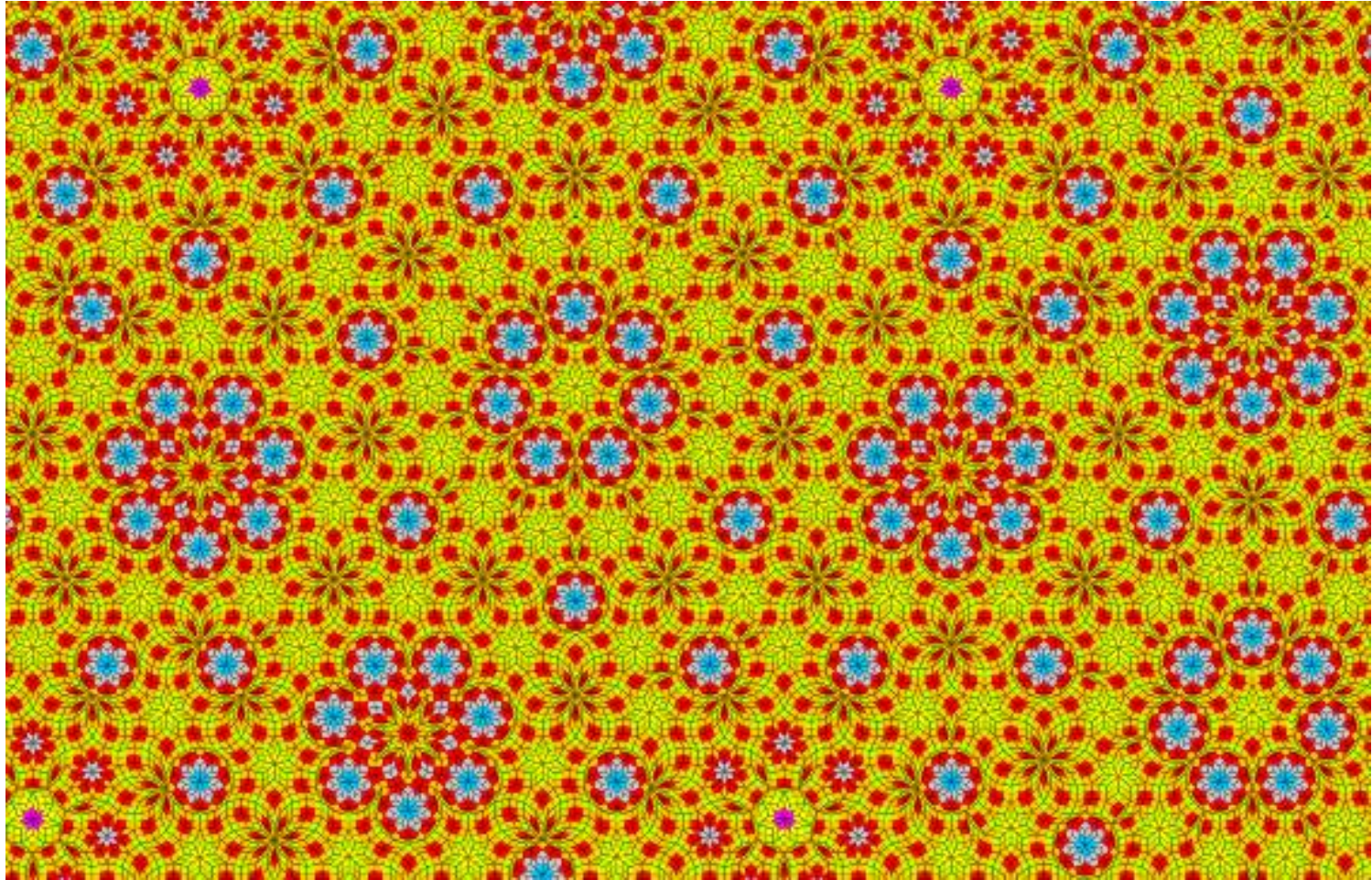
## Использование аperiodических мозаик в дизайне



Мозаика с симметрией 7-го порядка. Фотопечать на посуде.  
Мозаика разработана авторами, фотопечать также осуществлена авторами.

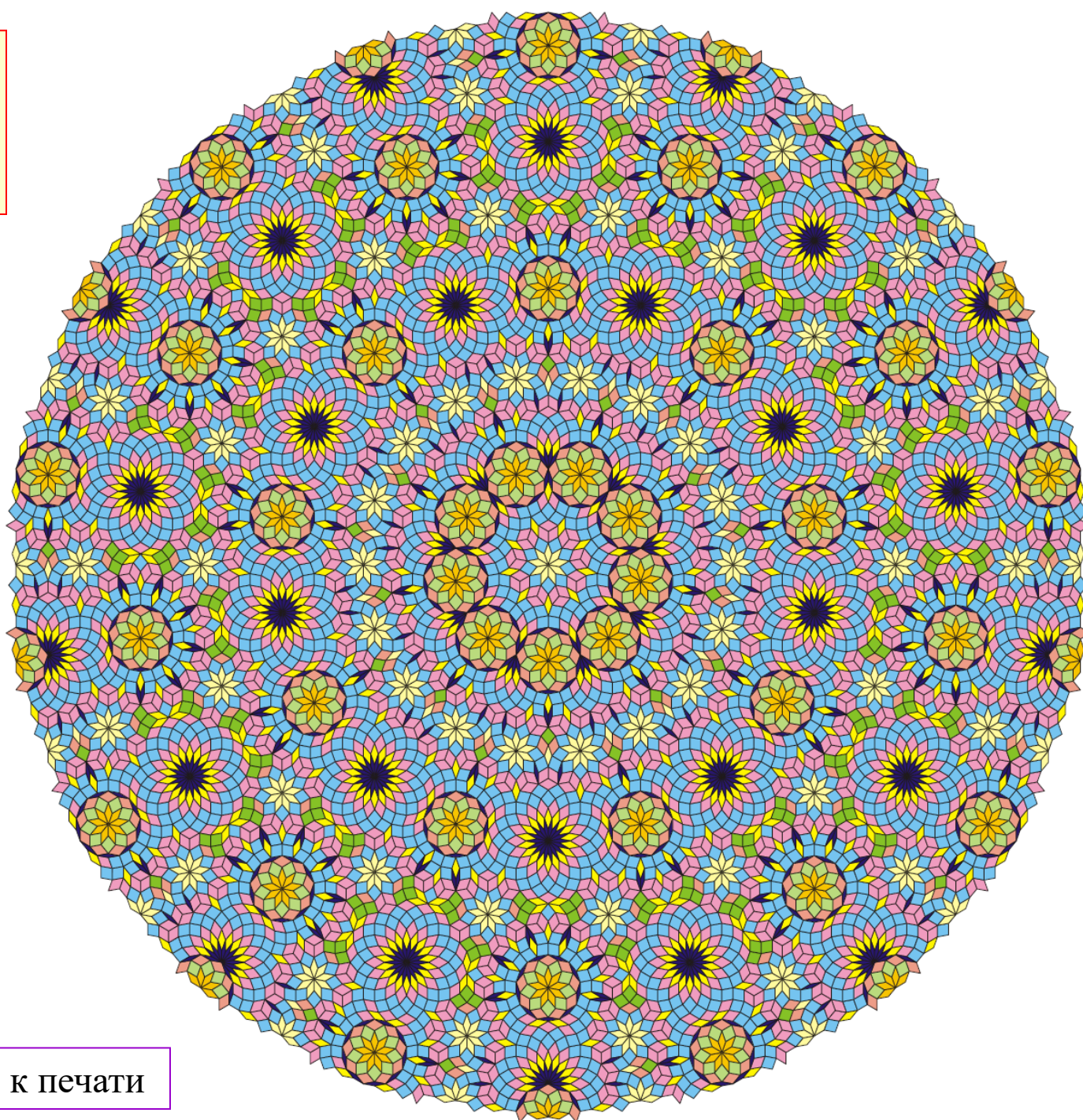
# Tilings encyclopedia

<https://tilings.math.uni-bielefeld.de/substitution/>



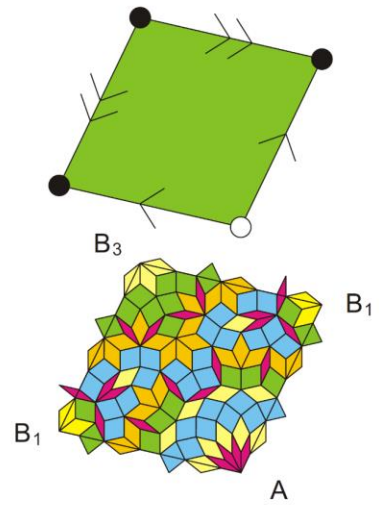
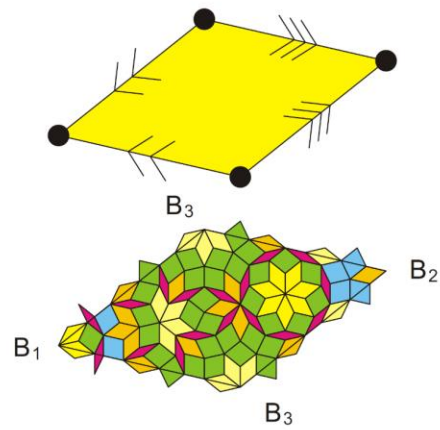
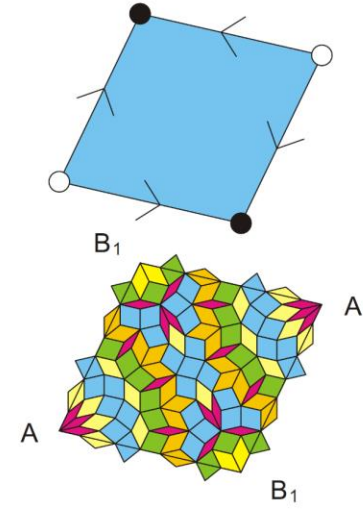
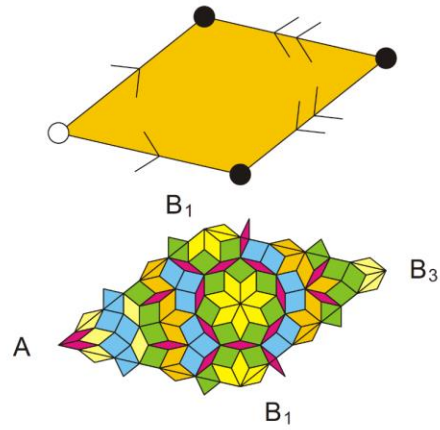
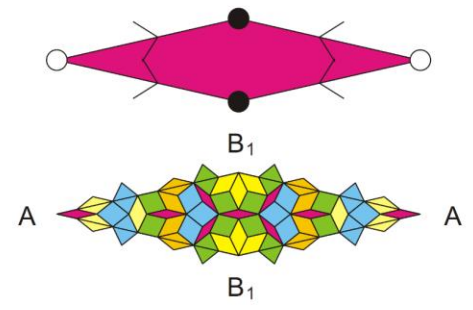
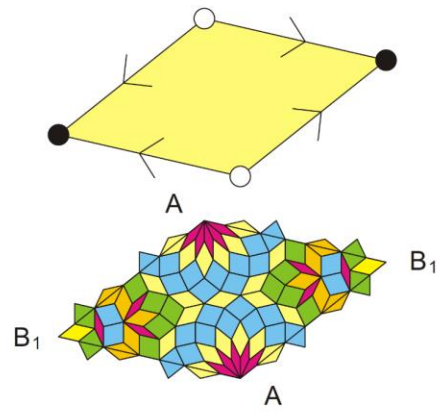
Madison

**9-fold**



**ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ**

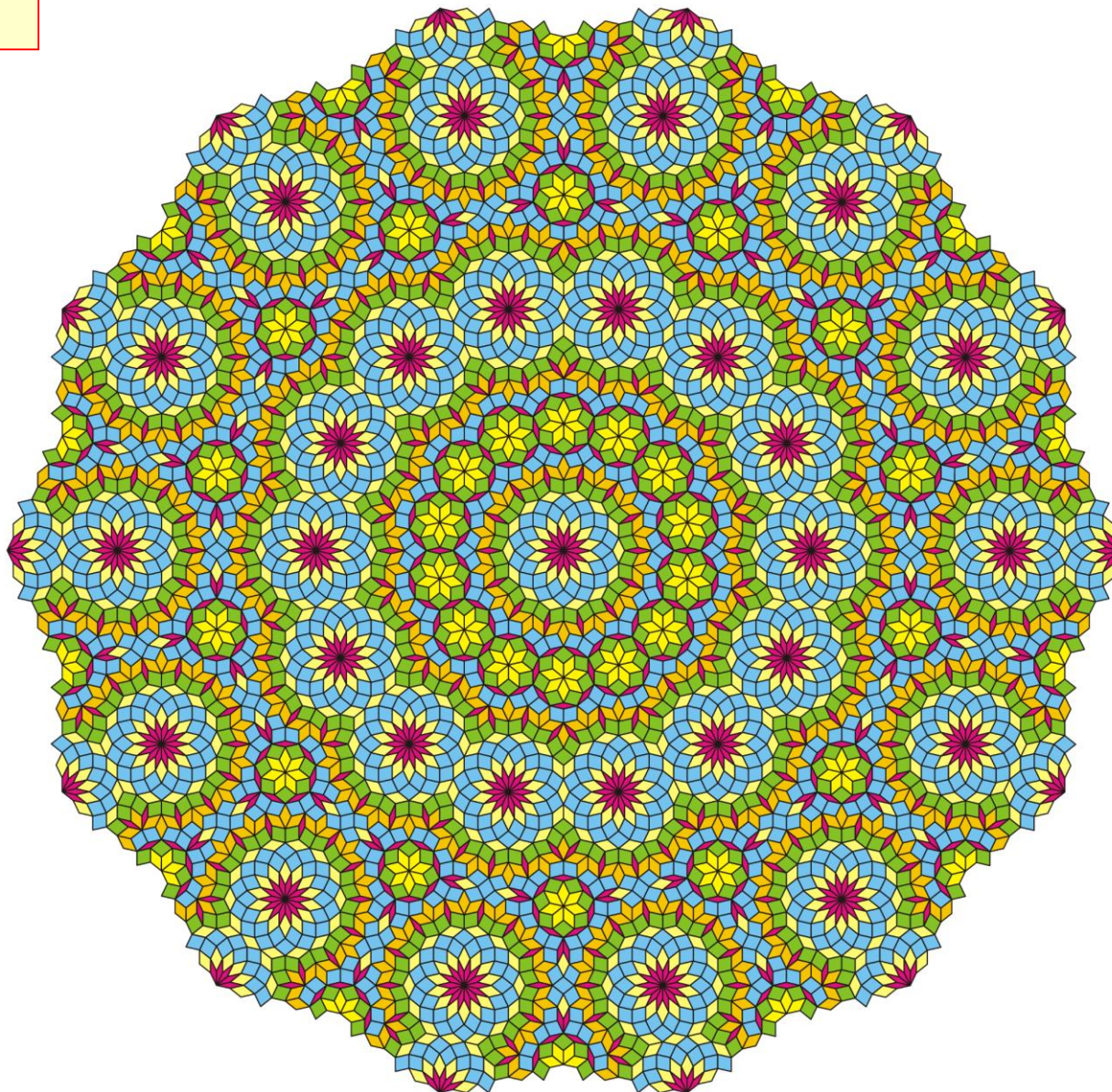
14/7



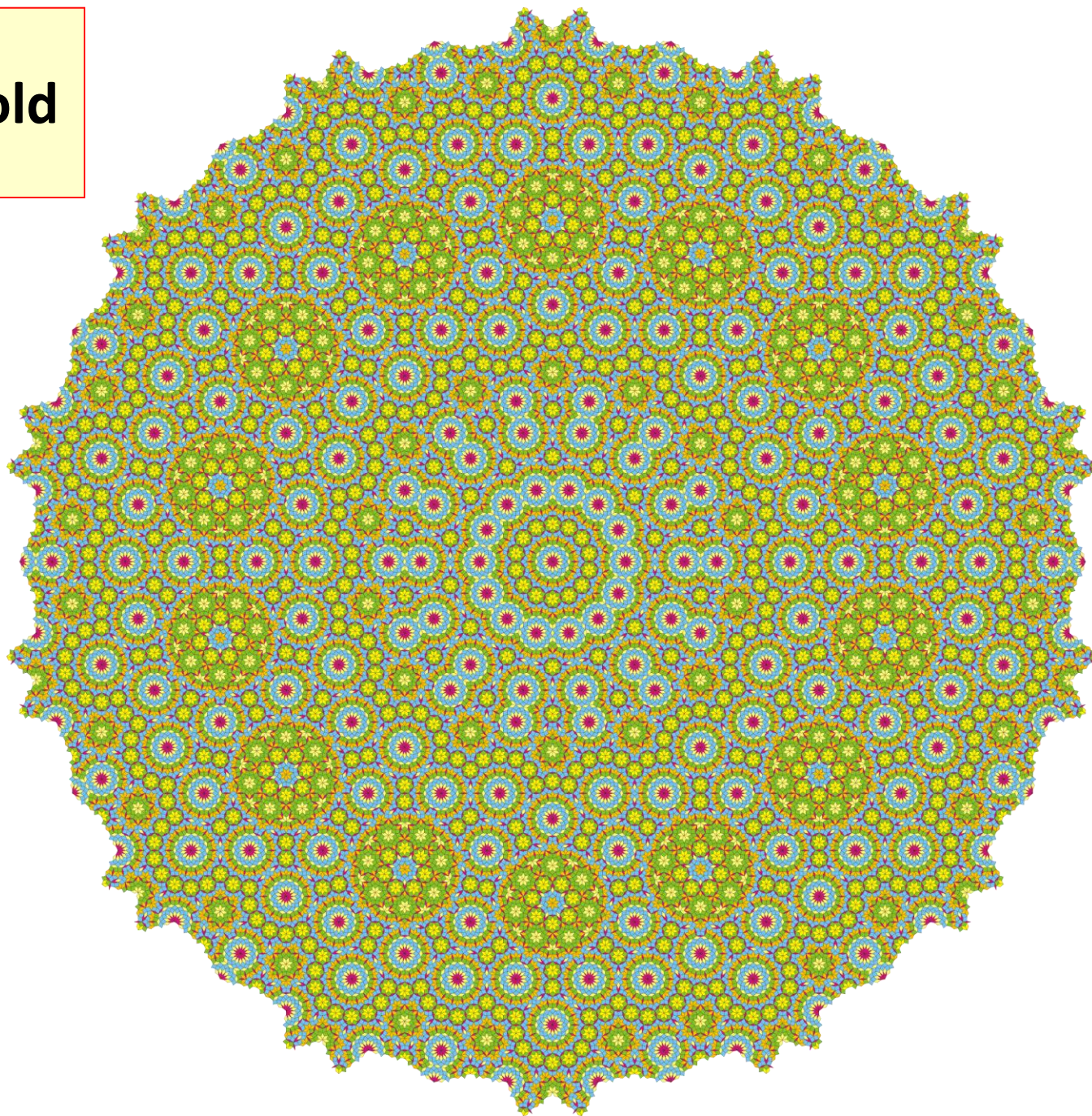
**14/7-fold**

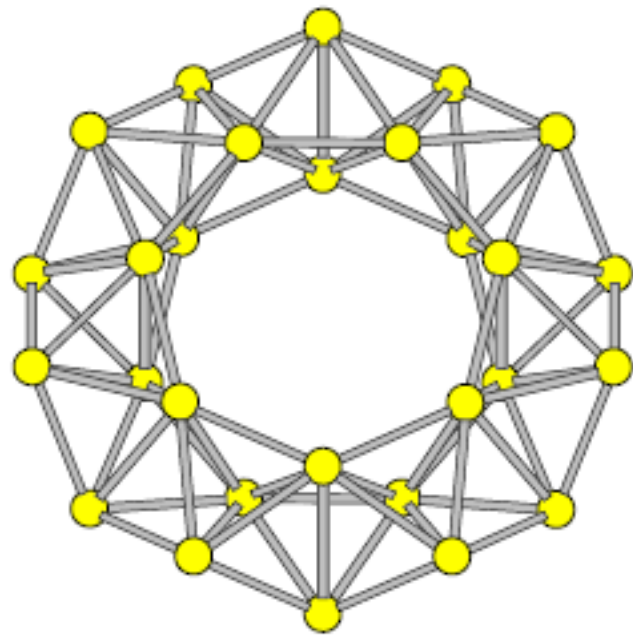
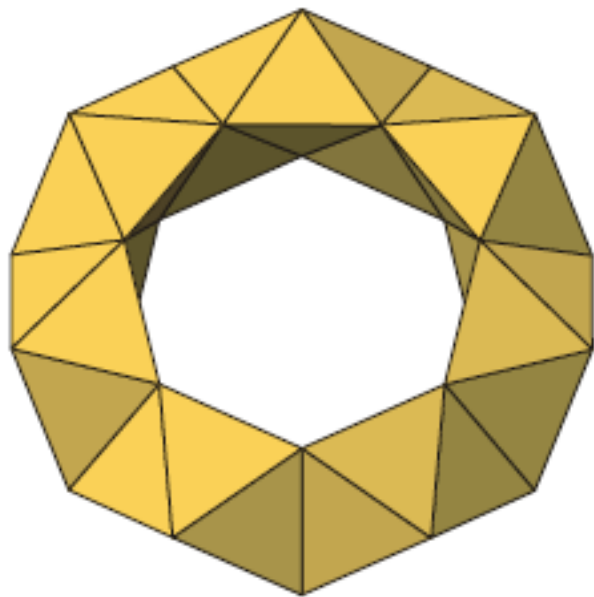


$A \rightarrow A$

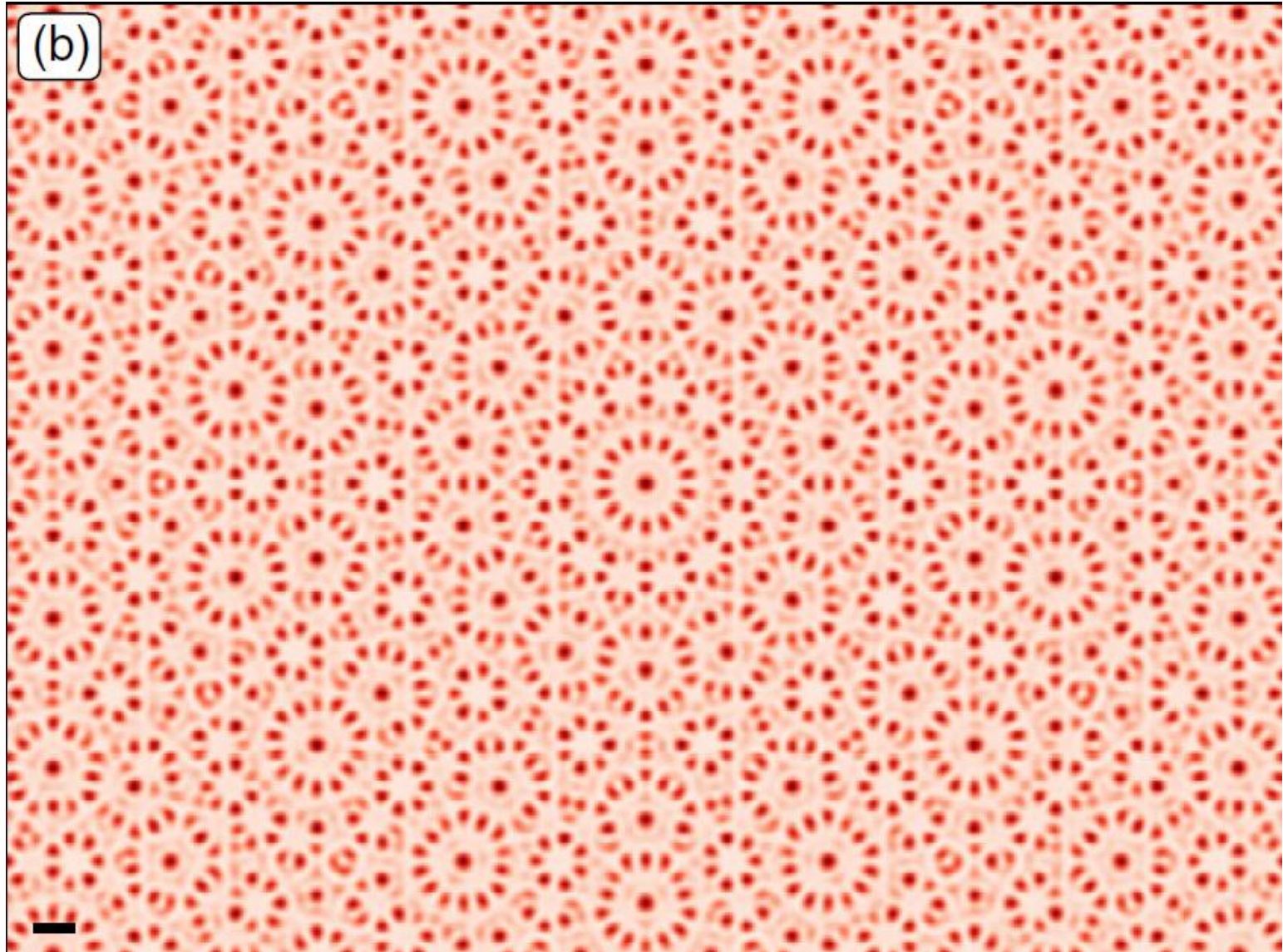


**14/7-fold**





*J. Rottler, M. Greenwood, B. Ziebarth (2012)*





*Freemen Dyson*  
Birds and frogs  
*Notices of the AMS*, **56**, 212-223 (2009).



На ум приходит связь между одномерными квазикристаллами и гипотезой Римана. Если гипотеза Римана верна, тогда нули дзета-функции образуют одномерный квазикристалл по определению. Они представляют собой распределение точечных масс вдоль прямой линии, а их Фурье-образом также, скорее всего, является распределение точечных масс – по одной на каждый логарифм простого числа и степени простого числа.

Первые численные расчеты: Одлышко, 1990

A.M. Odlyzko (1990) Primes, quantum chaos, and computers. In: Number theory: Proceedings of a symposium. Board on Mathematical Sciences, National Research Council, p. 35–46.

## Chapter 23

### The spectrum and the staircase of primes

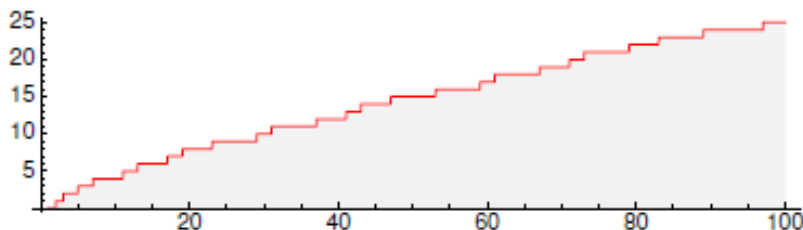


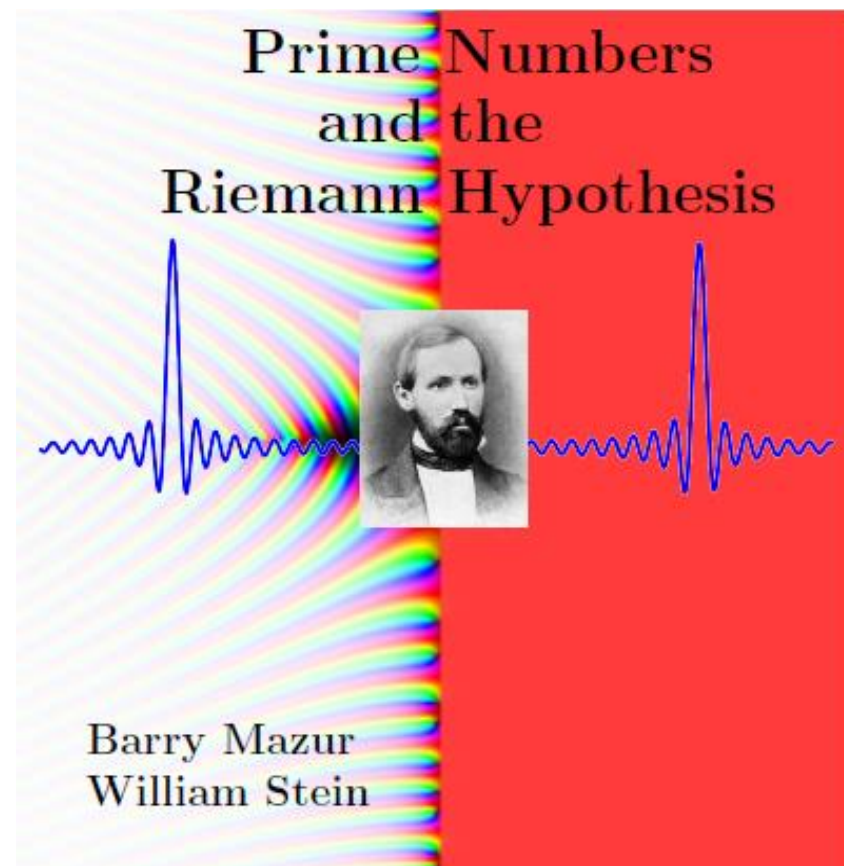
Figure 23.1: The Staircase of primes

In view of the amazing data-compression virtues of Fourier analysis, it isn't unnatural to ask these questions:

- Is there a way of using Fourier analysis to better understand the complicated picture of the staircase of primes?
- Does this staircase of primes (or, perhaps, some tinkered version of the staircase that contains the same basic information) have a *spectrum*?
- If such a *spectrum* exists, can we compute it conveniently, just as we have done for the saw-tooth wave above, or for the major third CE chord?
- Assuming the spectrum exists, and is computable, will our understanding of this spectrum allow us to reproduce all the pertinent information about the placement of primes among all whole numbers, elegantly and faithfully?

- And here is a most important question: will that spectrum show us order and organization lurking within the staircase that we would otherwise be blind to?

Strangely enough, it is towards questions like these that Riemann's Hypothesis takes us. We began with the simple question about primes: how to count them, and are led to ask for profound, and hidden, regularities in structure.



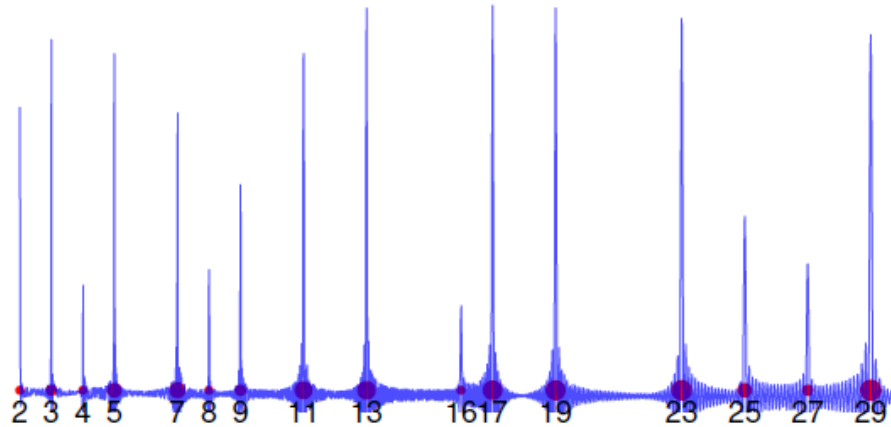


Figure 35.1: Illustration of  $-\sum_{i=1}^{1000} \cos(\log(s)\theta_i)$ , where  $\theta_1 \sim 14.13, \dots$  are the first 1000 contributions to the Riemann spectrum. The red dots are at the prime powers  $p^n$ , whose size is proportional to  $\log(p)$ .

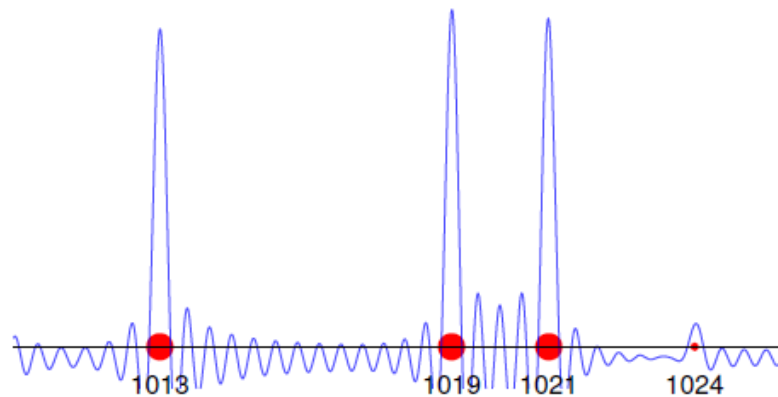
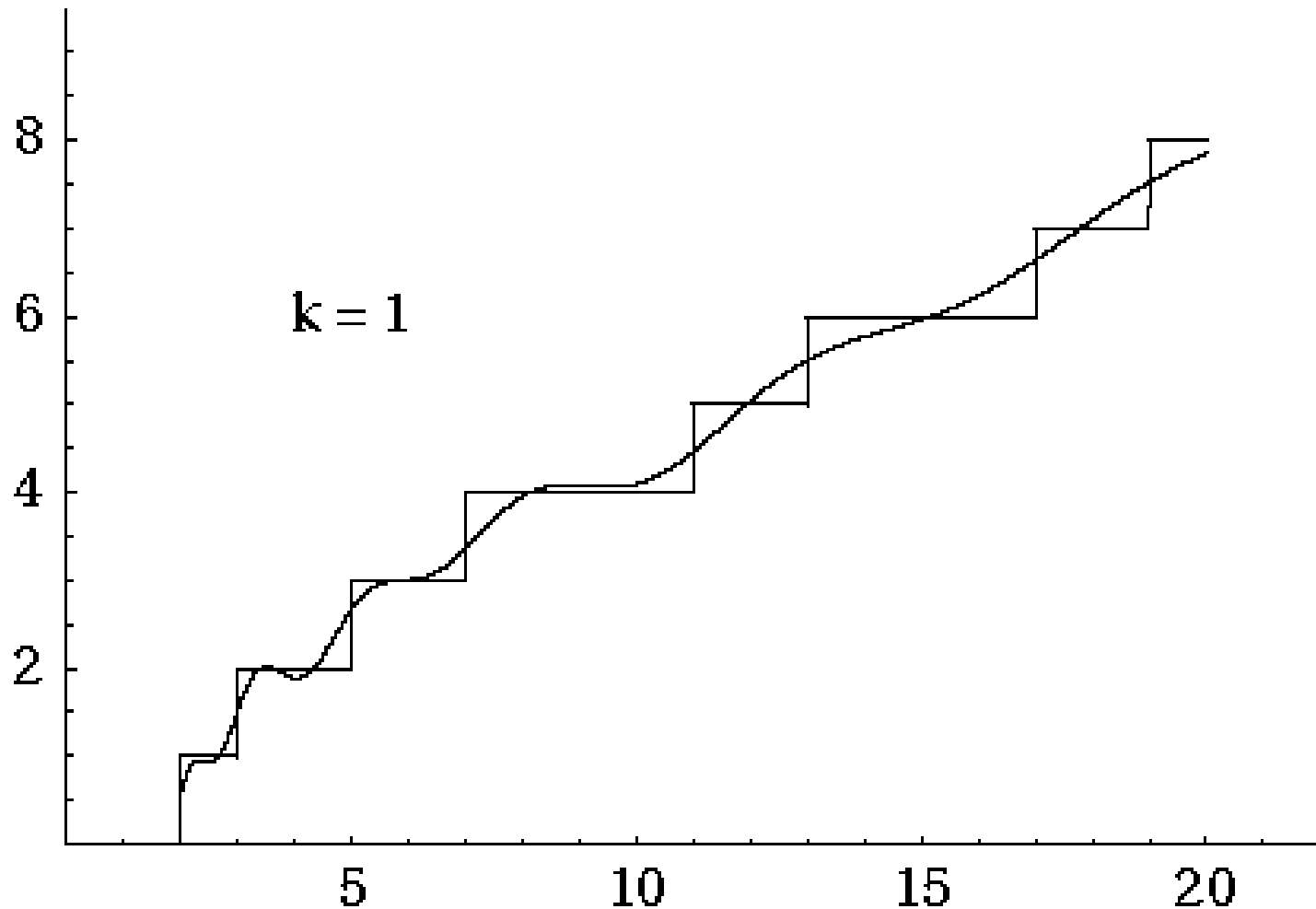


Figure 35.3: Fourier series from 1,000 to 1,030 using 15,000 of the numbers  $\theta_i$ . Note the twin primes 1,019 and 1,021 and that  $1,024 = 2^{10}$ .

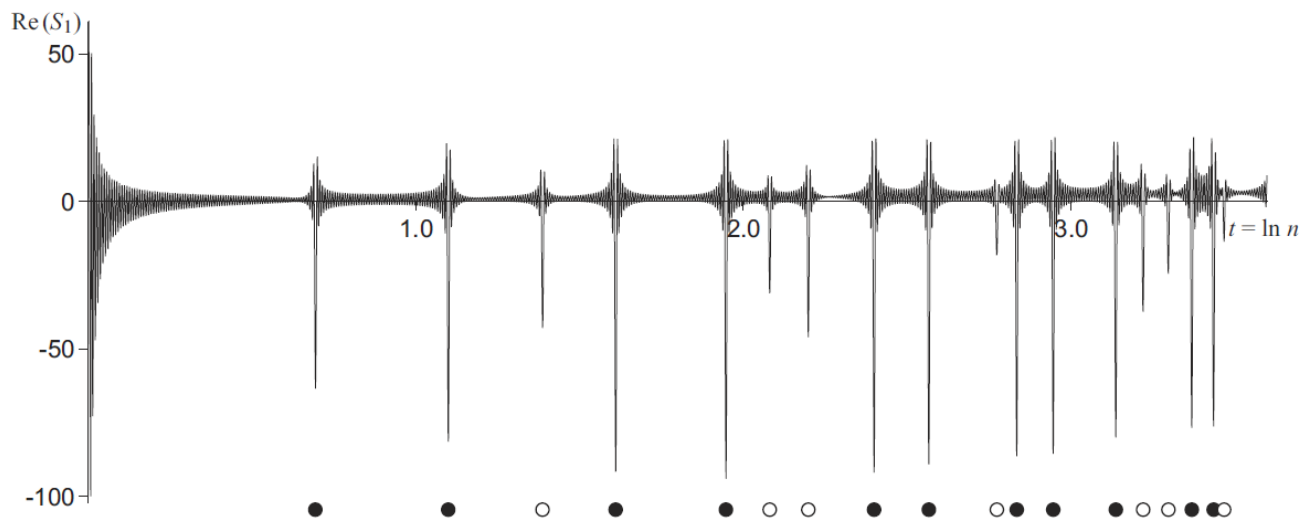
# The n-Category Café

*Quasicrystals and the Riemann Hypothesis, John Baez, 2013*

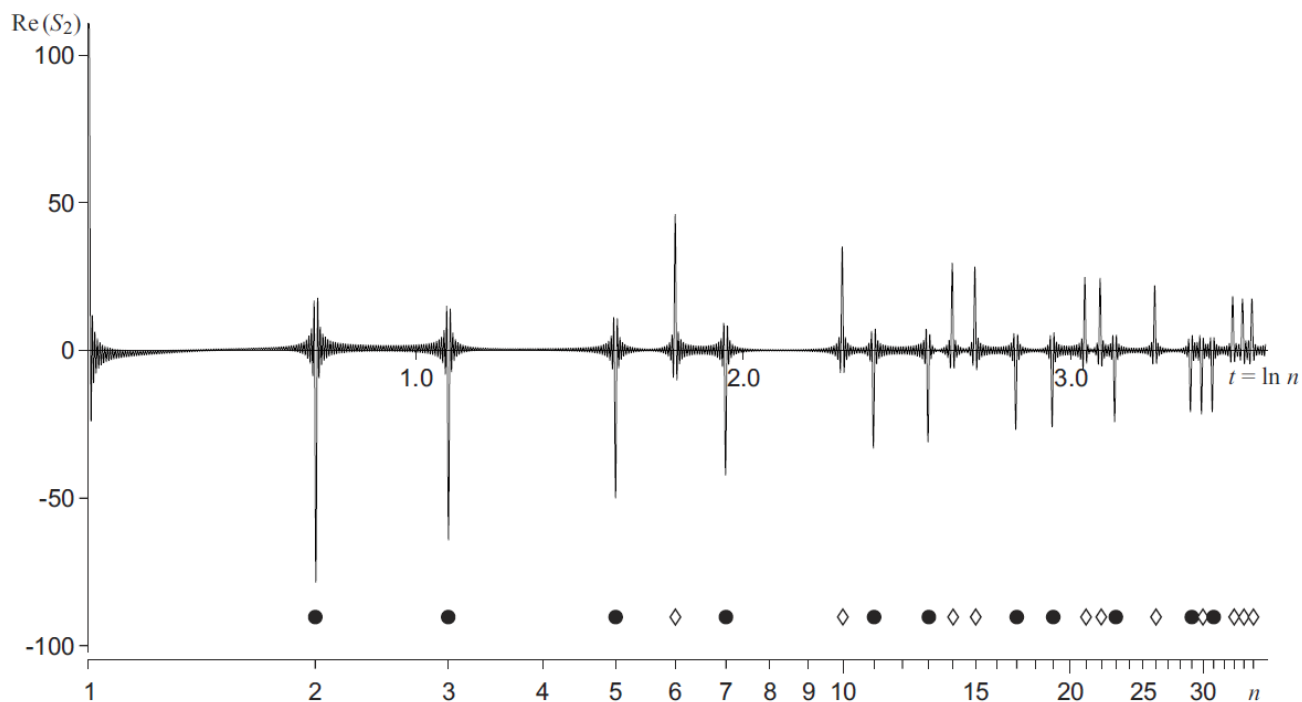
*The Riemann Hypothesis (Part 1), John Baez, 2019*

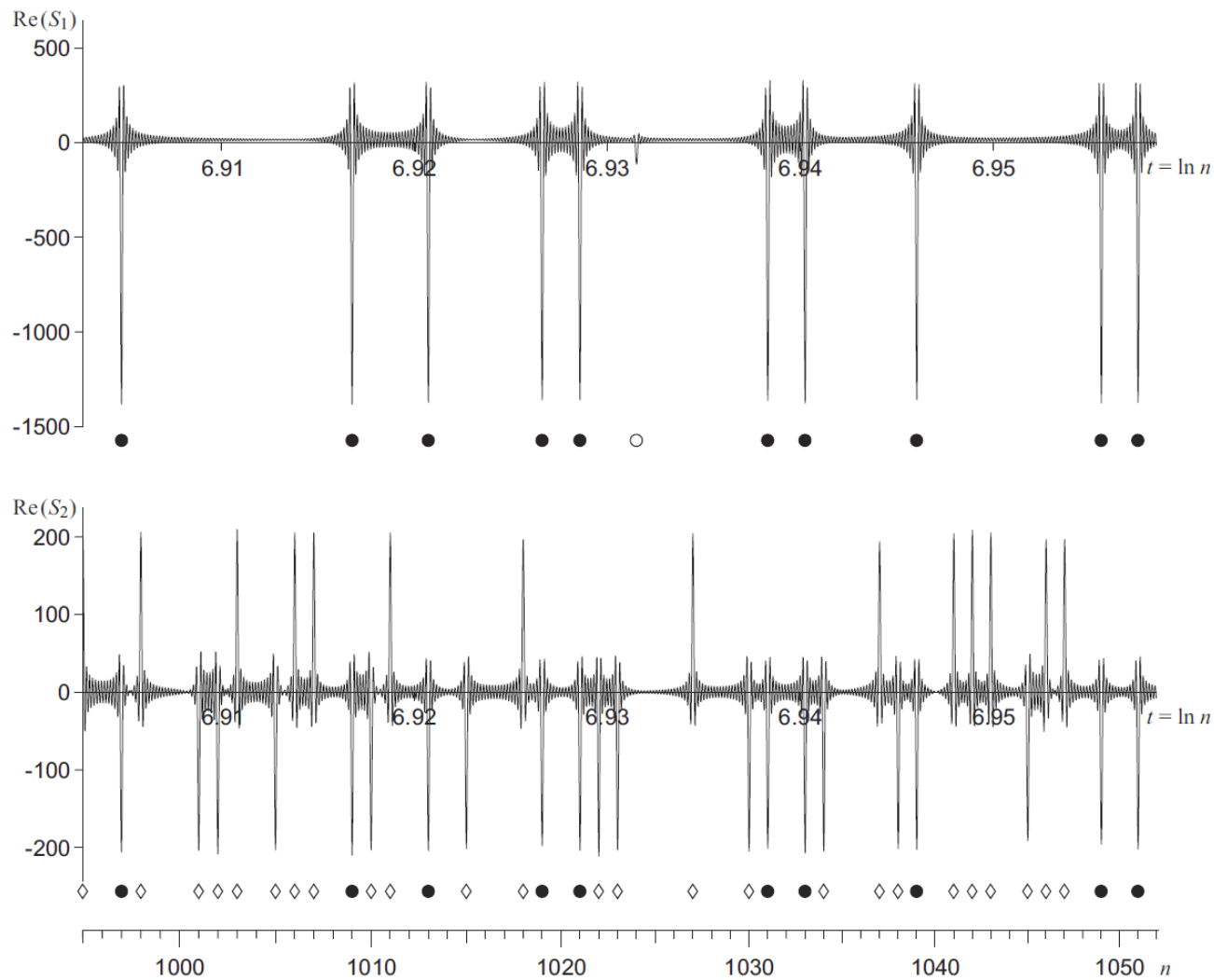


фон Мангольдт →  
Чебышев

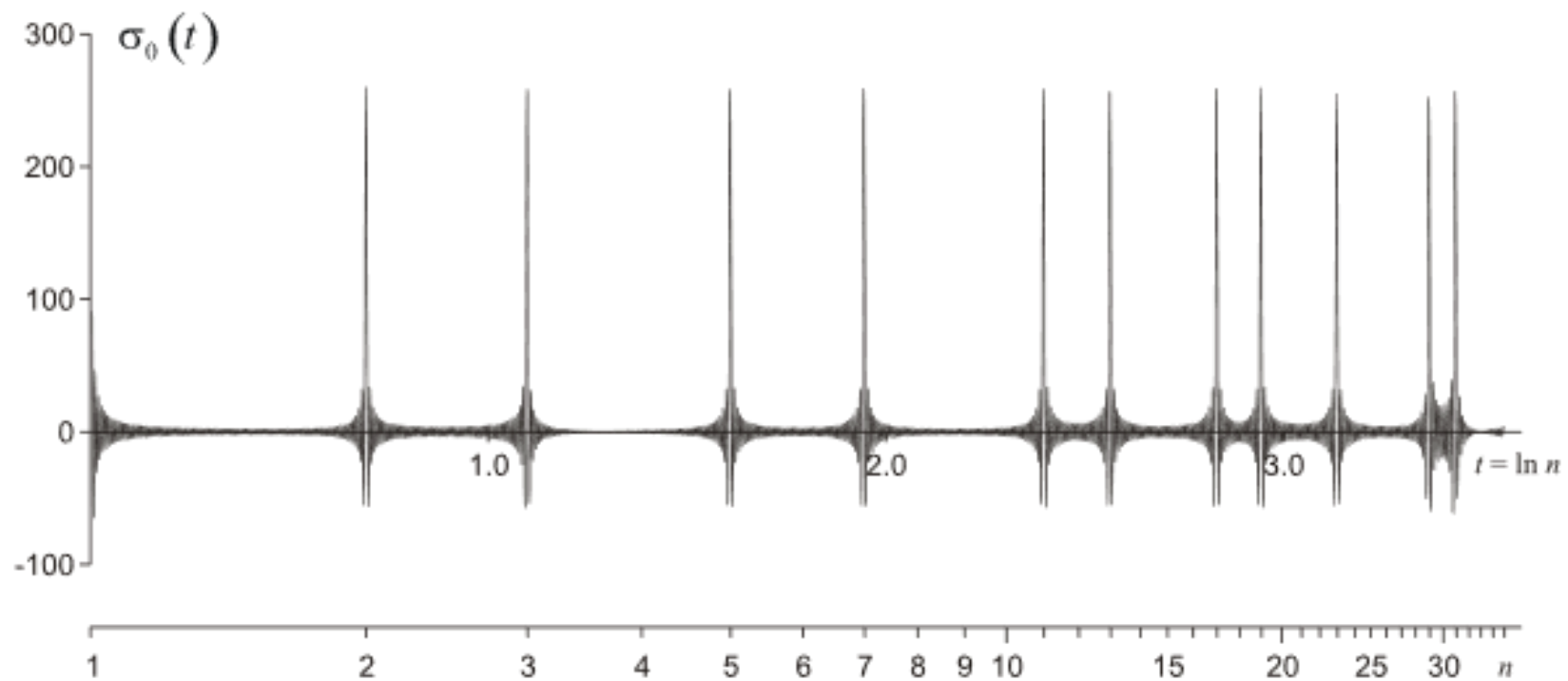


Мёбиус →  
Мертенс

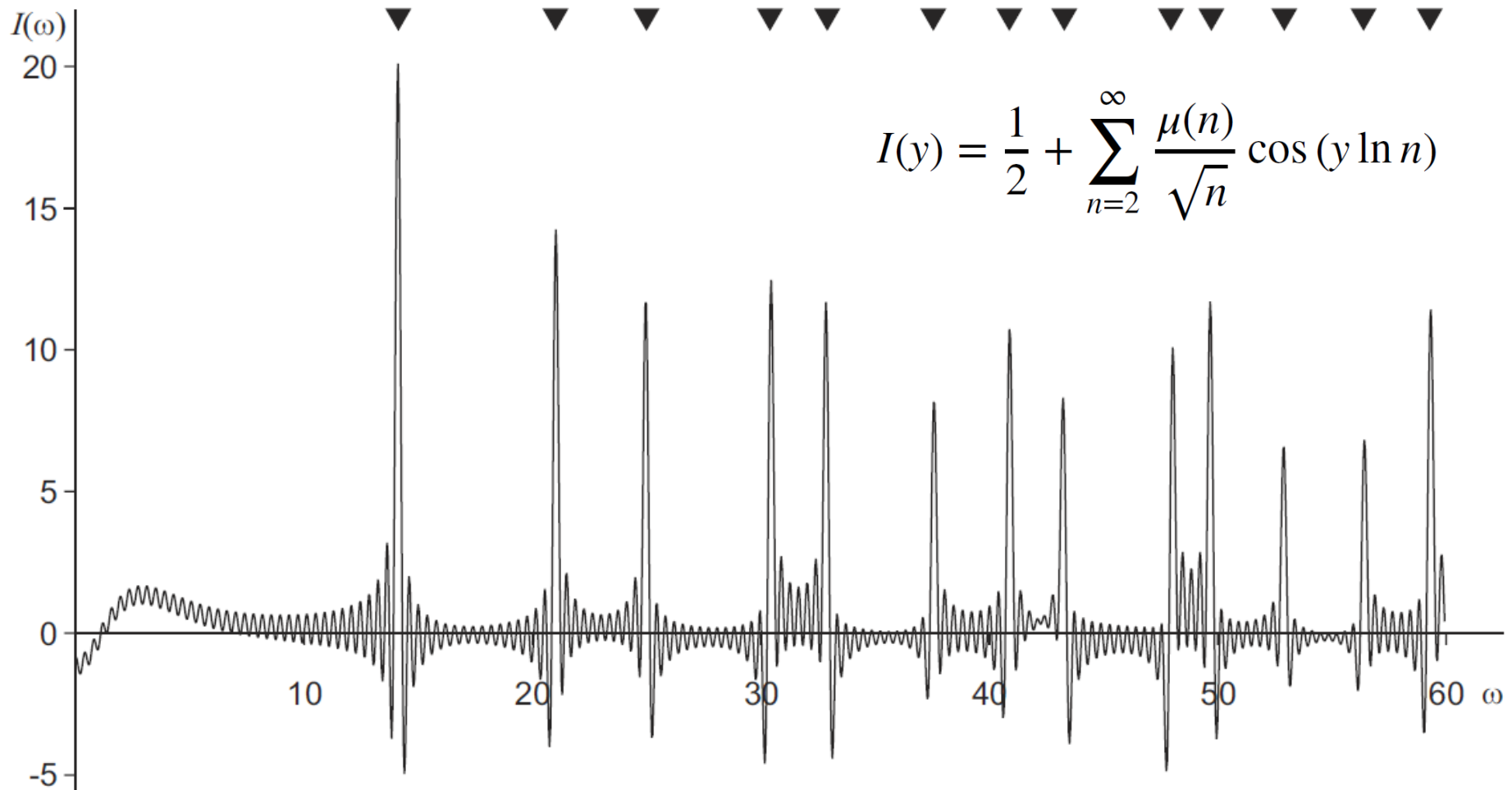




Простые числа = спектр



*A.E. Madison, P.A. Madison, S.V. Kozyrev (2022)*  
Aperiodic Crystals, Riemann Zeta Function and Primes,  
*Struct. Chem.*





# Апериодическая дифракционная решетка

*Журнал технической физики, 2024, том 94, вып. 4*

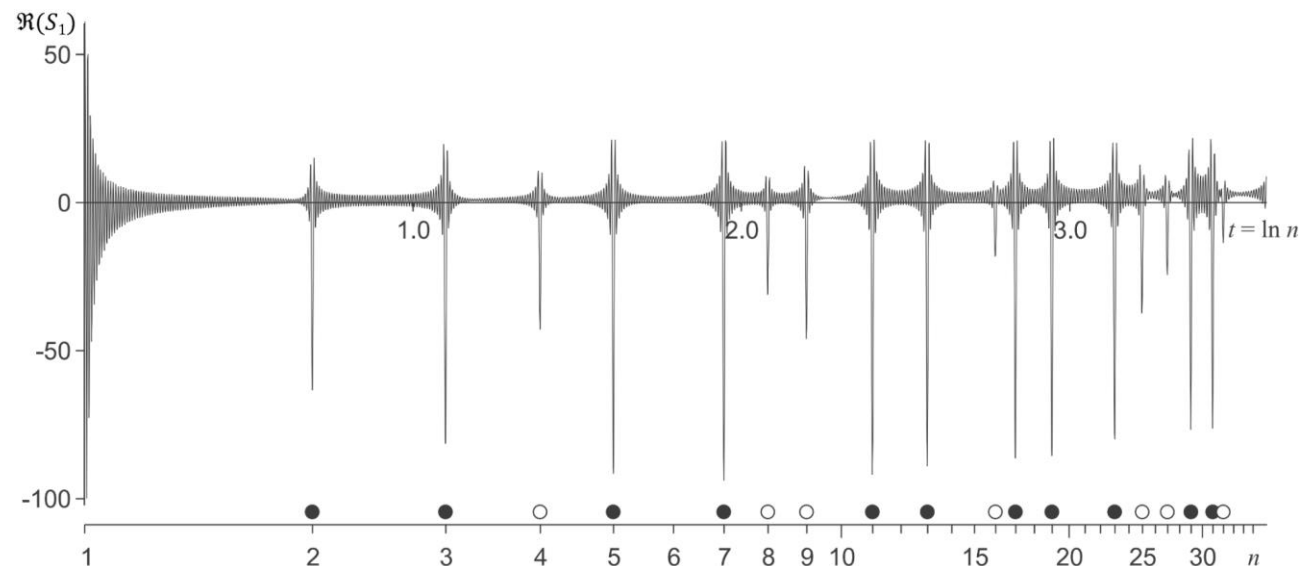
---

09

**Апериодическая дифракционная решетка, основанная на связи между простыми числами и нулями дзета-функции Римана**

© А.Е. Мадисон,<sup>1</sup> Д.А. Козодаев,<sup>2</sup> А.Н. Казанков,<sup>2</sup> П.А. Мадисон,<sup>1,3</sup> В.А. Мошников<sup>3</sup>

# Спектр распределения корней $\zeta$ -функции Римана



$$\begin{aligned}
 S_N(t) &= \sum_{k=-N}^N \cos(\gamma_k t) = 2 \sum_{k=1}^N \cos(\gamma_k t) \\
 &\approx \left(2\pi \frac{N}{\gamma_N} + 1\right) \frac{\sin(\gamma_N t)}{\pi t} - \frac{\text{Si}(\gamma_N t)}{\pi t} \\
 &\quad - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sin(\gamma_N(t \pm \ln n))}{\pi(t \pm \ln n)} \\
 &\quad + \exp\left(\frac{t}{2}\right) + \exp\left(-\frac{t}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Ожидаемые положения пиков:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \sin \varphi = m \ln p$$

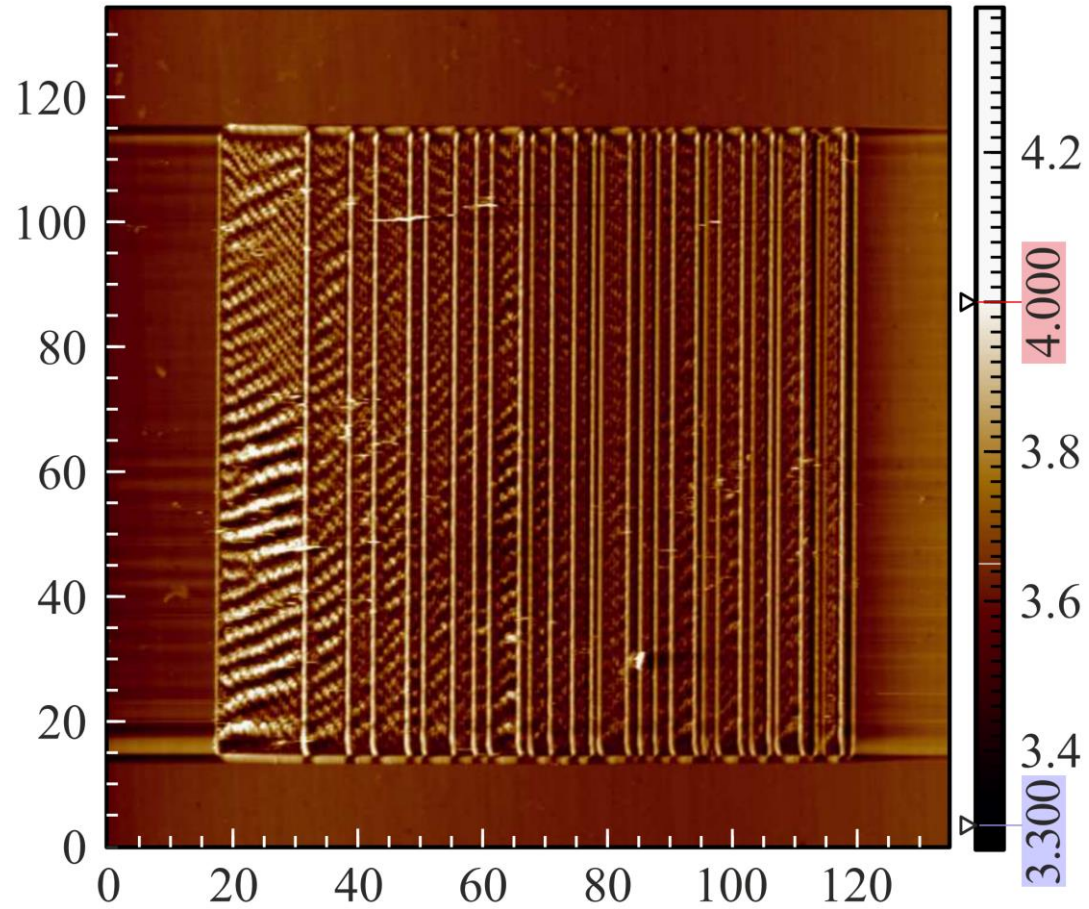
Ожидаемые амплитуды пиков:

$$A_{max} \propto \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} = \frac{\ln p}{\sqrt{p^m}} = p^{-\frac{m}{2}} \ln p$$

# Дифракционная аperiодическая квазирешетка

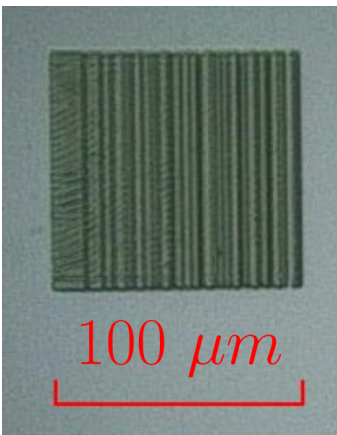
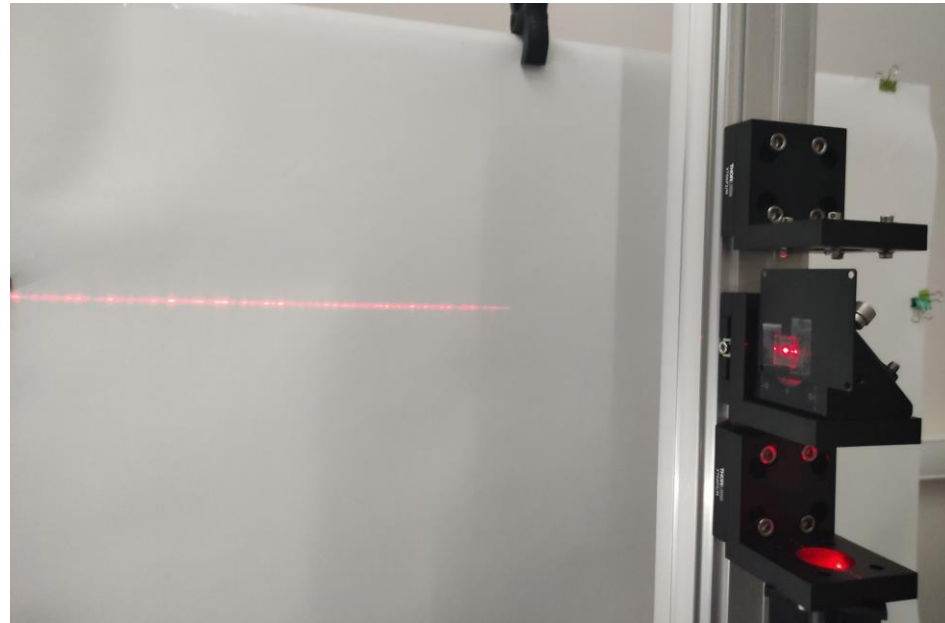
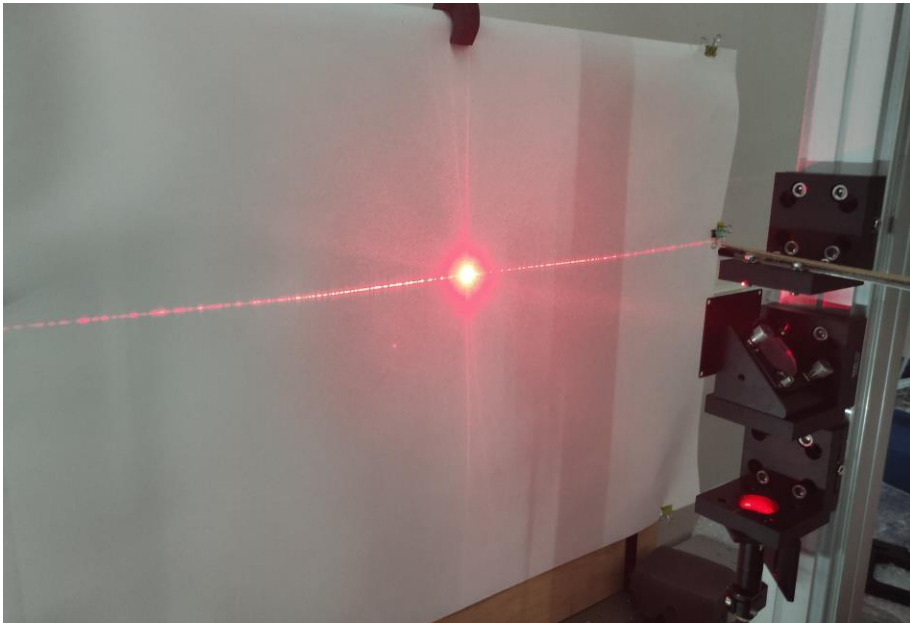


Шаблон для силовой литографии



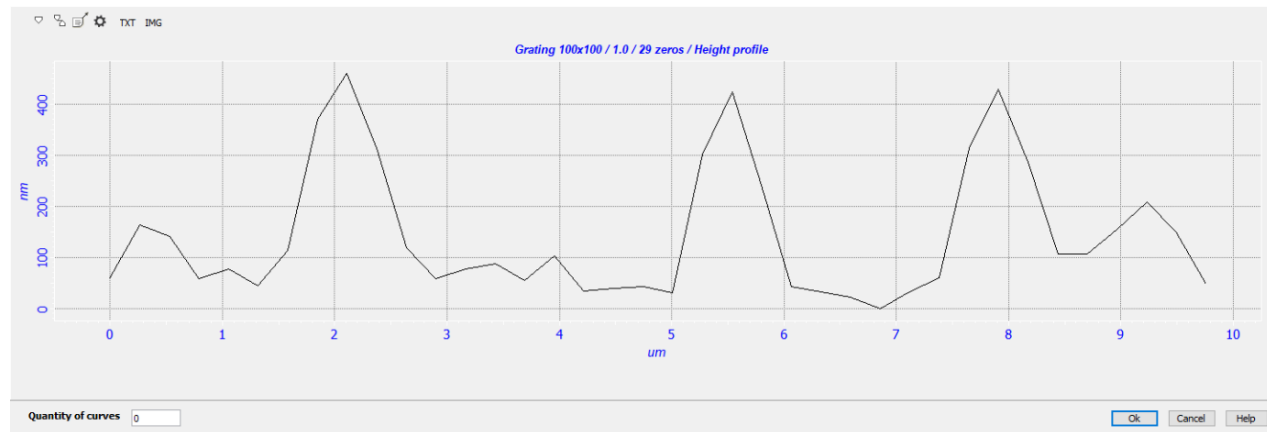
Атомно-силовая микроскопия поверхности подложки

# Приборная реализация эксперимента по наблюдению дифракционной картины

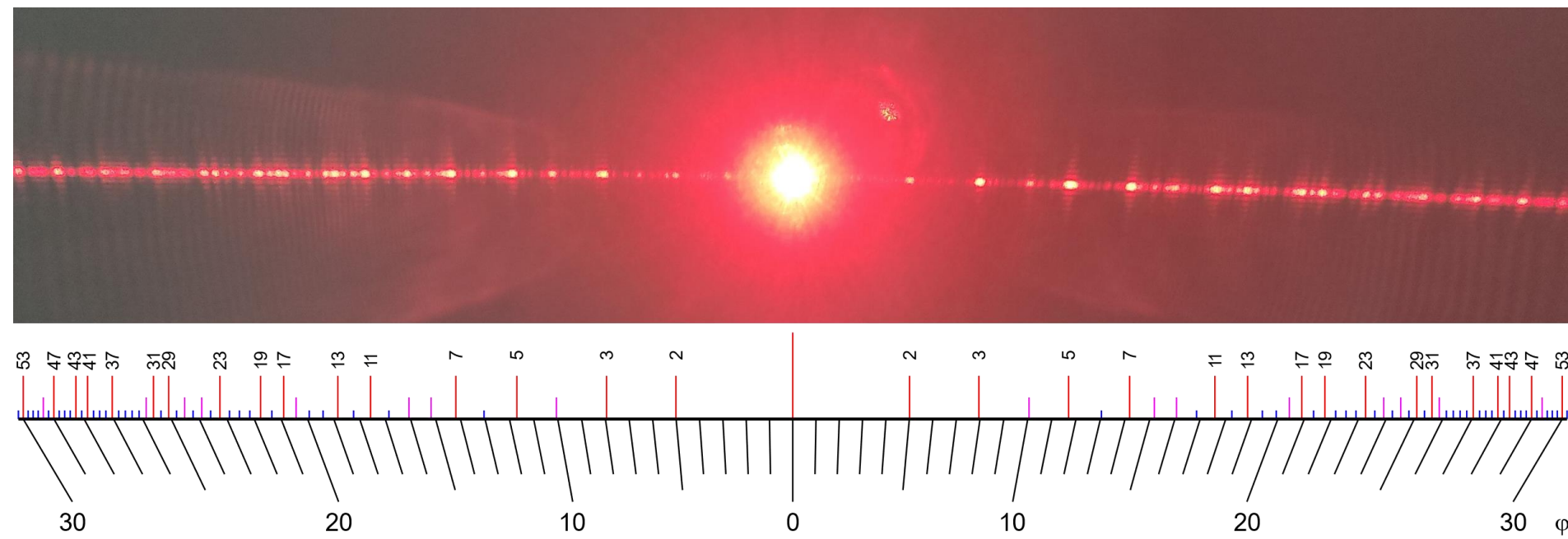


$N = 29$

$a = 1.0$

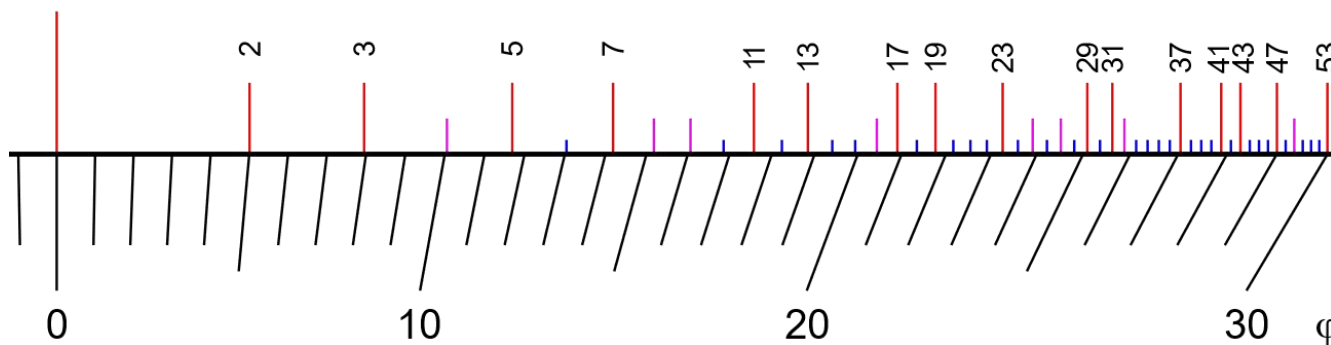
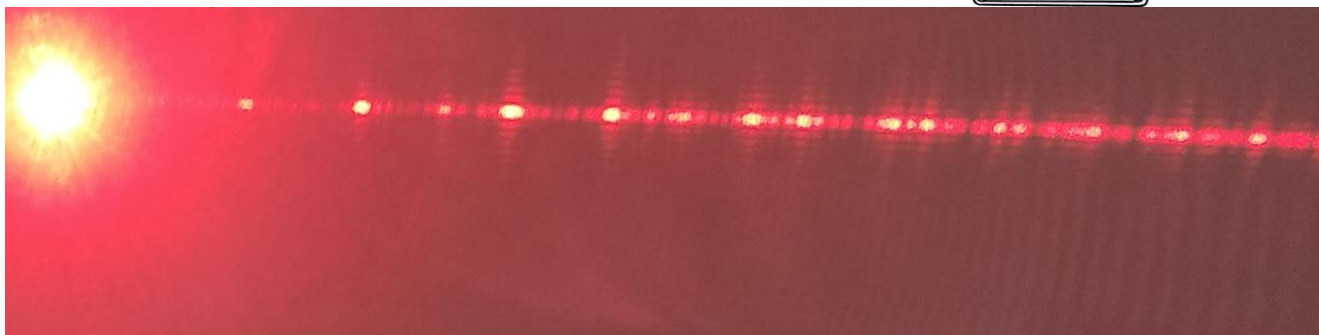
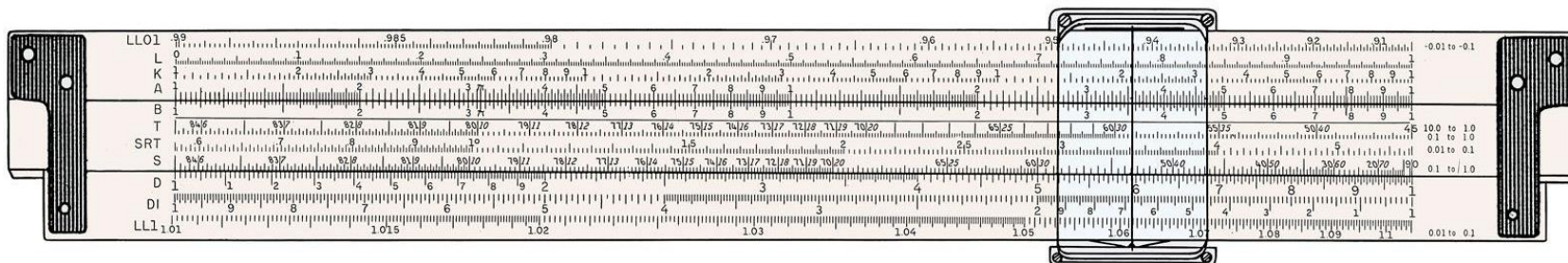


# Интерпретация дифракционной картины



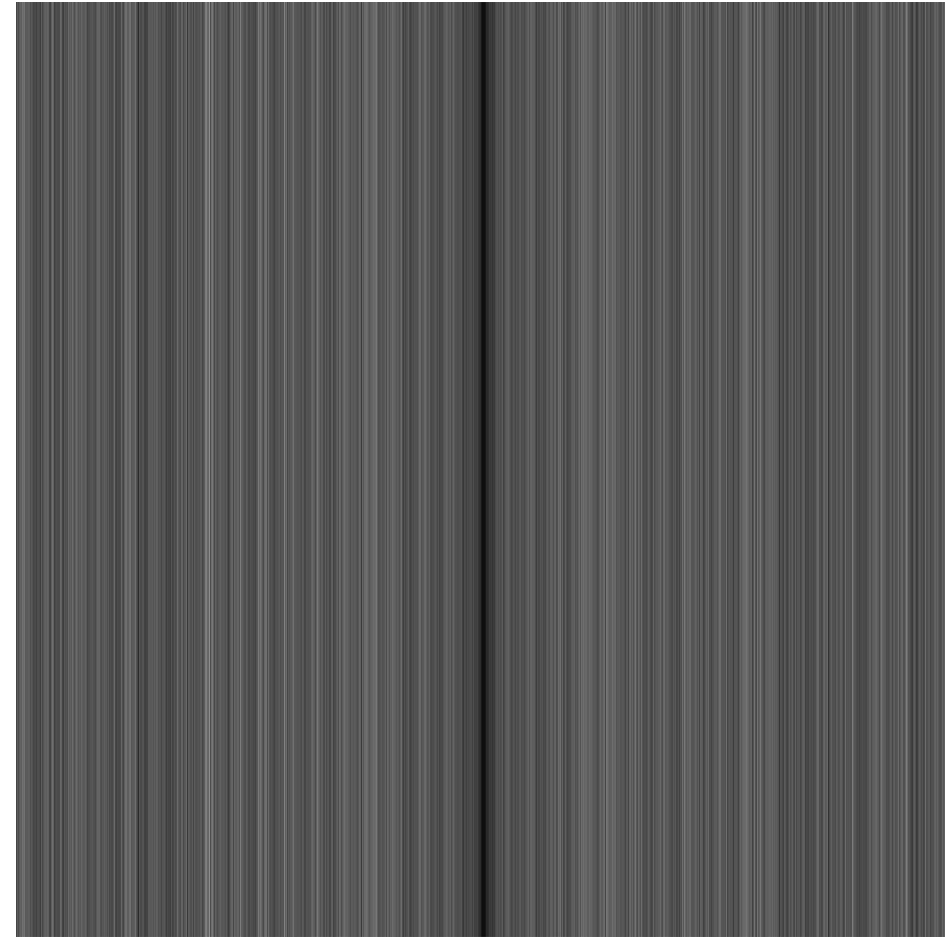
$a = 0.8$

# Интерпретация дифракционной картины

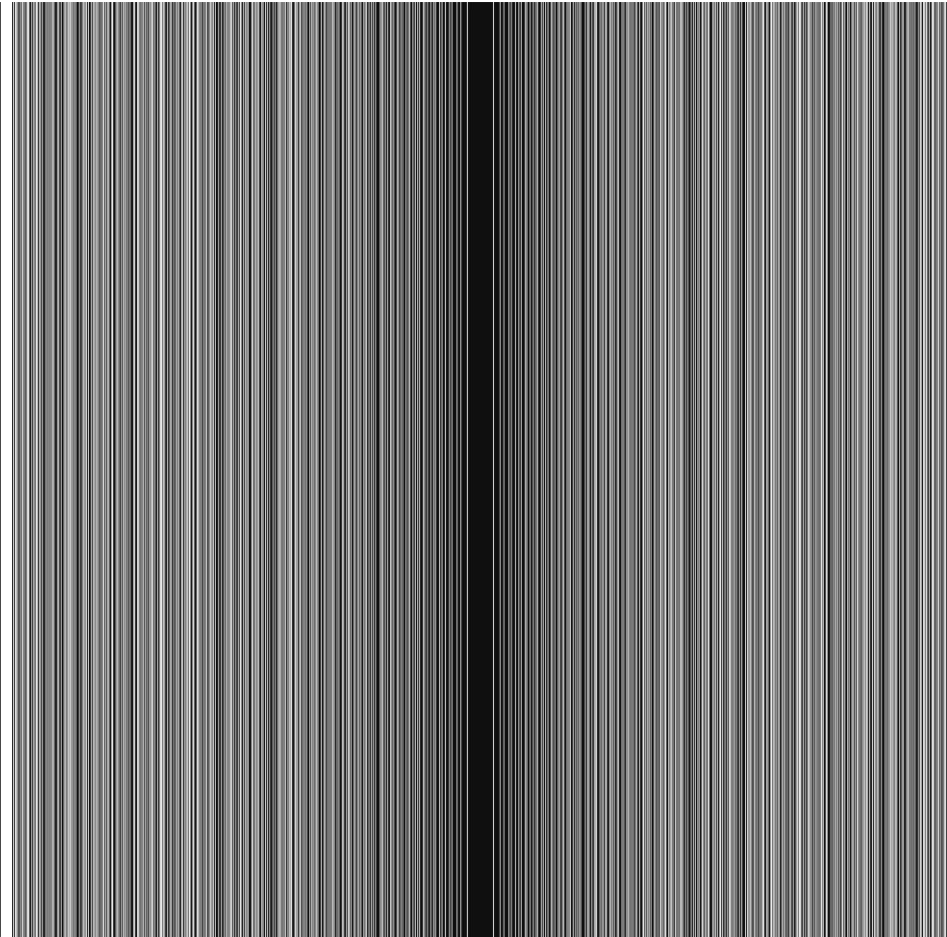


# Шаблоны дифракционных решёток

$$a = 1.0$$



Шаблон 5×5 мм



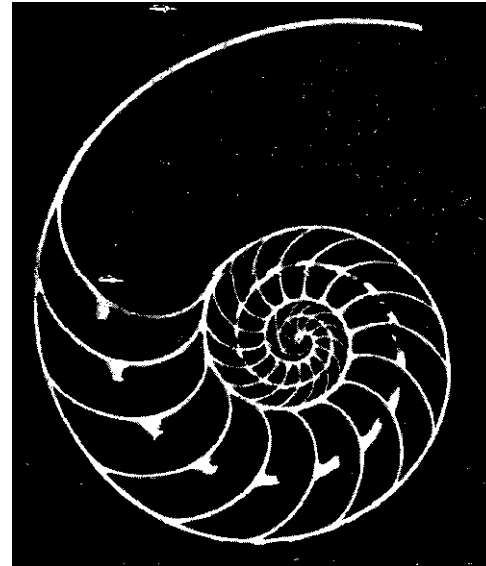
Увеличено: область 1×1 мм

## ВЫВОД

- 1. Создан прототип дифракционного оптического элемента нового типа – аperiodической дифракционной решетки, основанной на связи между простыми числами и нулями дзета-функции Римана.**
- 2. Дифракция Брэгга – не единственный вариант конструктивного сложения волн.**



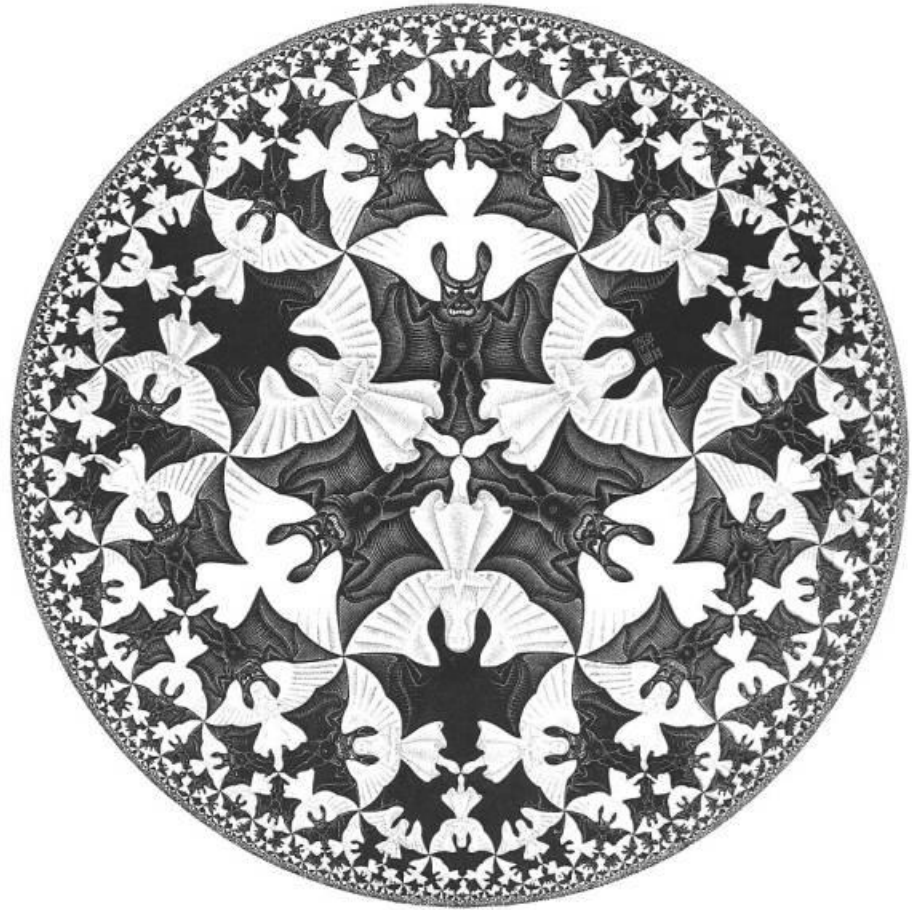
# Современная кристаллография



**9.6. Симметрия подобия.** Если при симметрическом преобразовании (1) не требовать выполнения условия изометричности (9) сохранения длин, углов, площадей, объемов, то получим расширение понятия равенства (2).

В симметрии подобия две подобные фигуры принимаются равными. При этом по мере удаления от особой точки или особой оси фигуры пропорционально возрастают расстояния в «равных» частях фигур (рис. 126), операции симметрии автоматически учитывают это возрастание. Соответствующие группы оказываются изоморфными группами  $G_1^3$ .

## Circle limit IV

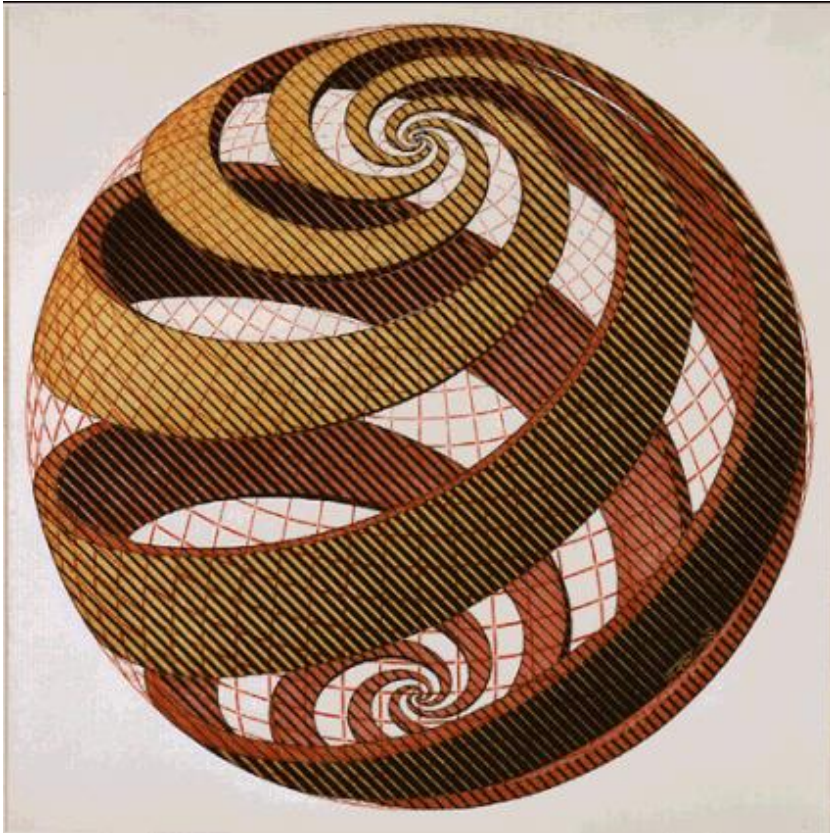


I've been killing myself, first to finally finish that litho ...

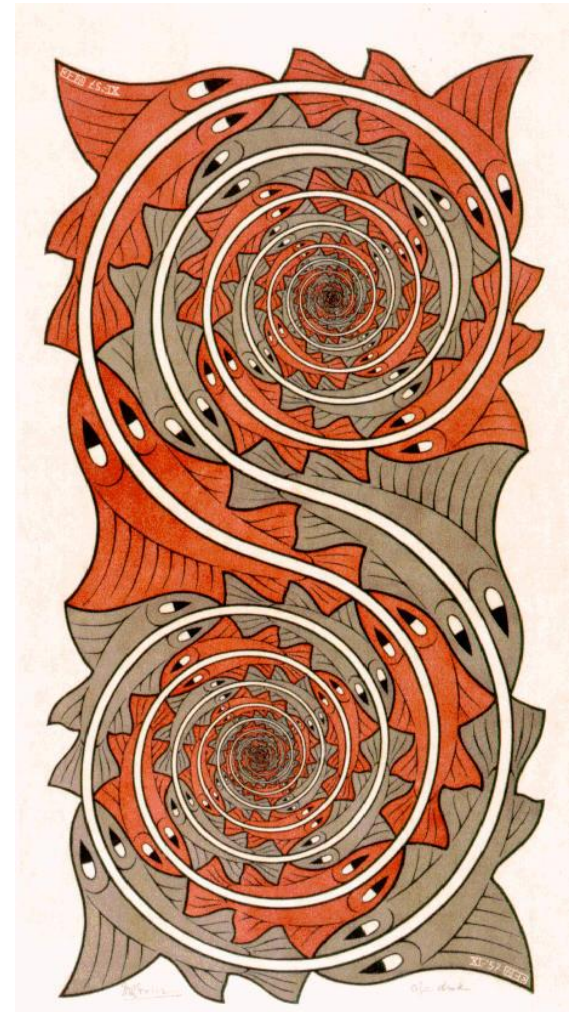
... this piece of work means a "milestone" in my development and that, beside myself, there will never be anyone else who'll realize that.

**M.C. Escher, 1960**

# M.C. Escher



Sphere spirals, 1958



Whirlpools, 1957

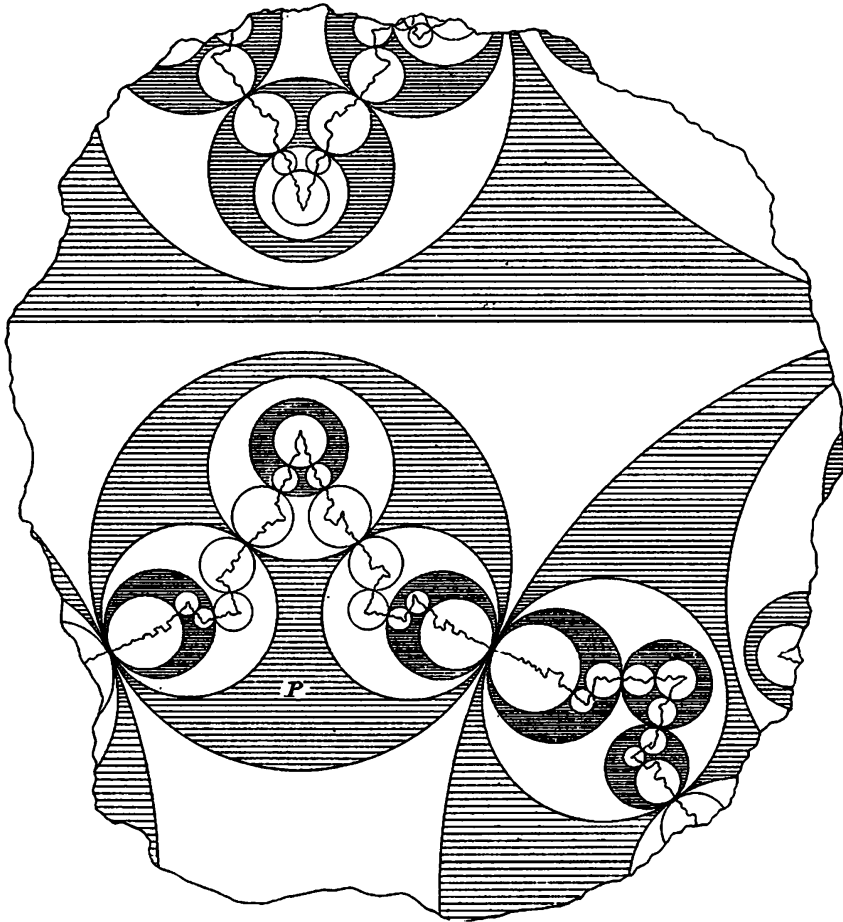


B. Mandelbrot

Немногие почитатели таланта Эшера знают, что этот знаменитый художник часто черпал свое вдохновение непосредственно из работ “неизвестных” математиков. Вся его работа часто состояла в простом добавлении декораций к самоинверсным мозаикам, известным еще Пуанкаре и представленным в многочисленных иллюстрациях к монографии Клейна и Фрике.

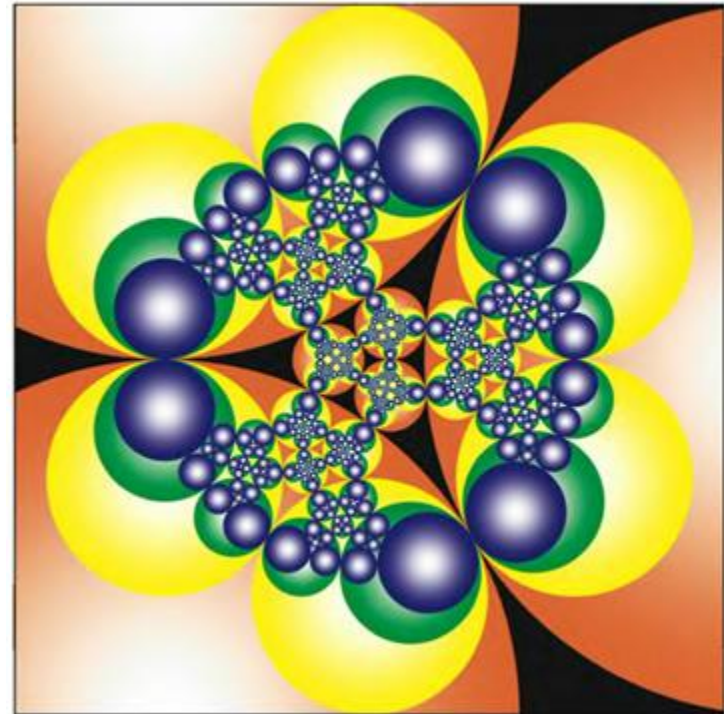
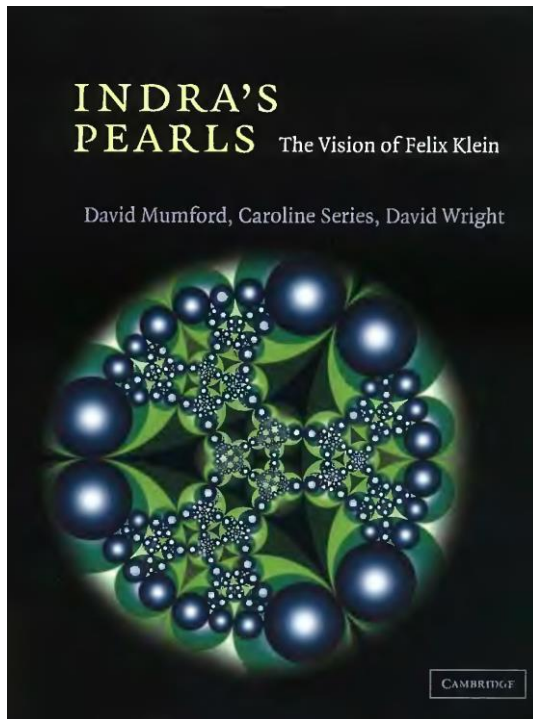
*B. Mandelbrot, Fractal Geometry of Nature, 1983*

# Felix Klein



F. Klein. Vorlesungen zur Theorie der automorphen Funktionen, 1897

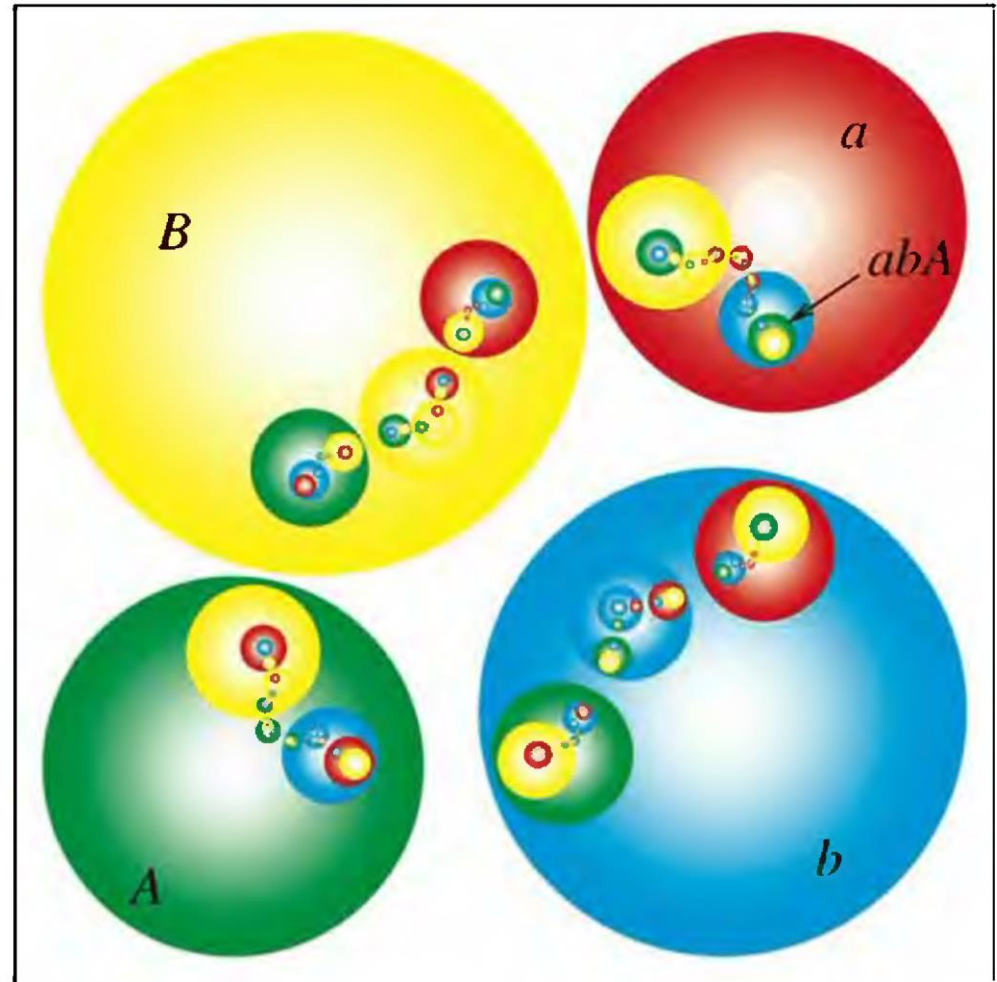
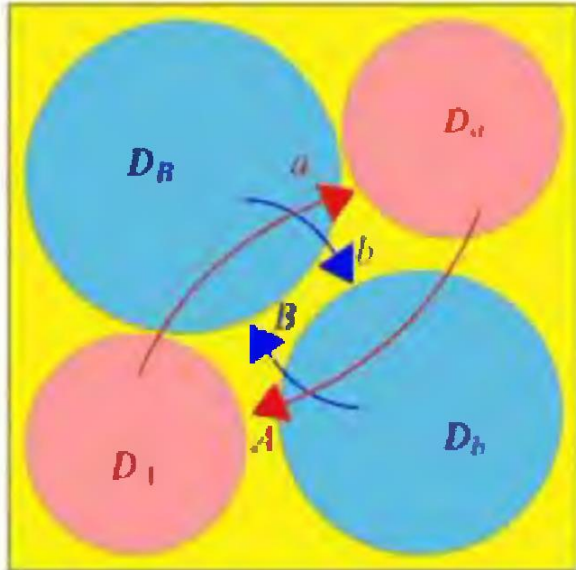
# David Mumford



Говорят, что в раю великого бога Индры висит огромная сияющая сеть. Она тоньше, чем паутина, и достигает самых дальних концов вселенной. Всюду, где пересекаются ее прозрачные нити, висит по блестящей жемчужине. Так как сеть бесконечна, то бесконечно и число жемчужин. В блестящей поверхности каждой жемчужины отражаются все остальные жемчужины, даже те, что находятся в самых удаленных уголках рая. В каждом же отражении бесконечно много жемчужин отражаются снова, так что этот процесс – отражение отражений – продолжается без конца.

# Schottky Group Generation

**Figure 4.1. The four initial Schottky disks.** The transformation  $a$  maps the exterior of  $D_A$  onto the interior of  $D_a$ , and  $b$  maps the exterior of  $D_B$  onto the interior of  $D_b$ .





Описывая впоследствии свое пребывание в сумасшедшем доме, Швейк отзывался об этом учреждении с необычайной похвалой.

— По правде сказать, я не знаю, почему эти сумасшедшие сердятся, что их там держат.

...

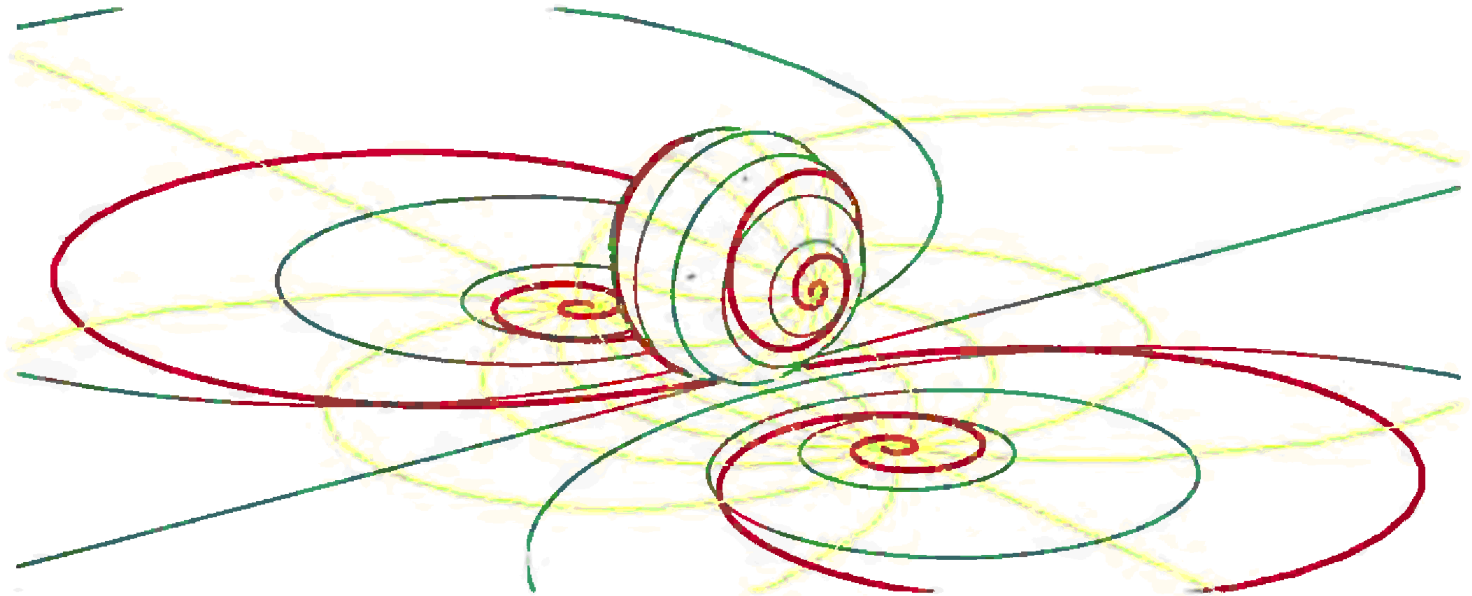
Познакомился я там с несколькими профессорами. Один из них все время ходил за мной по пятам и разъяснял, что прародина цыган была в Крконошах, а другой доказывал, что внутри земного шара имеется другой шар, значительно больше наружного. В сумасшедшем доме каждый мог говорить все, что взбредет ему в голову, словно в парламенте.



# Стереографическая проекция + поворот сферы Римана

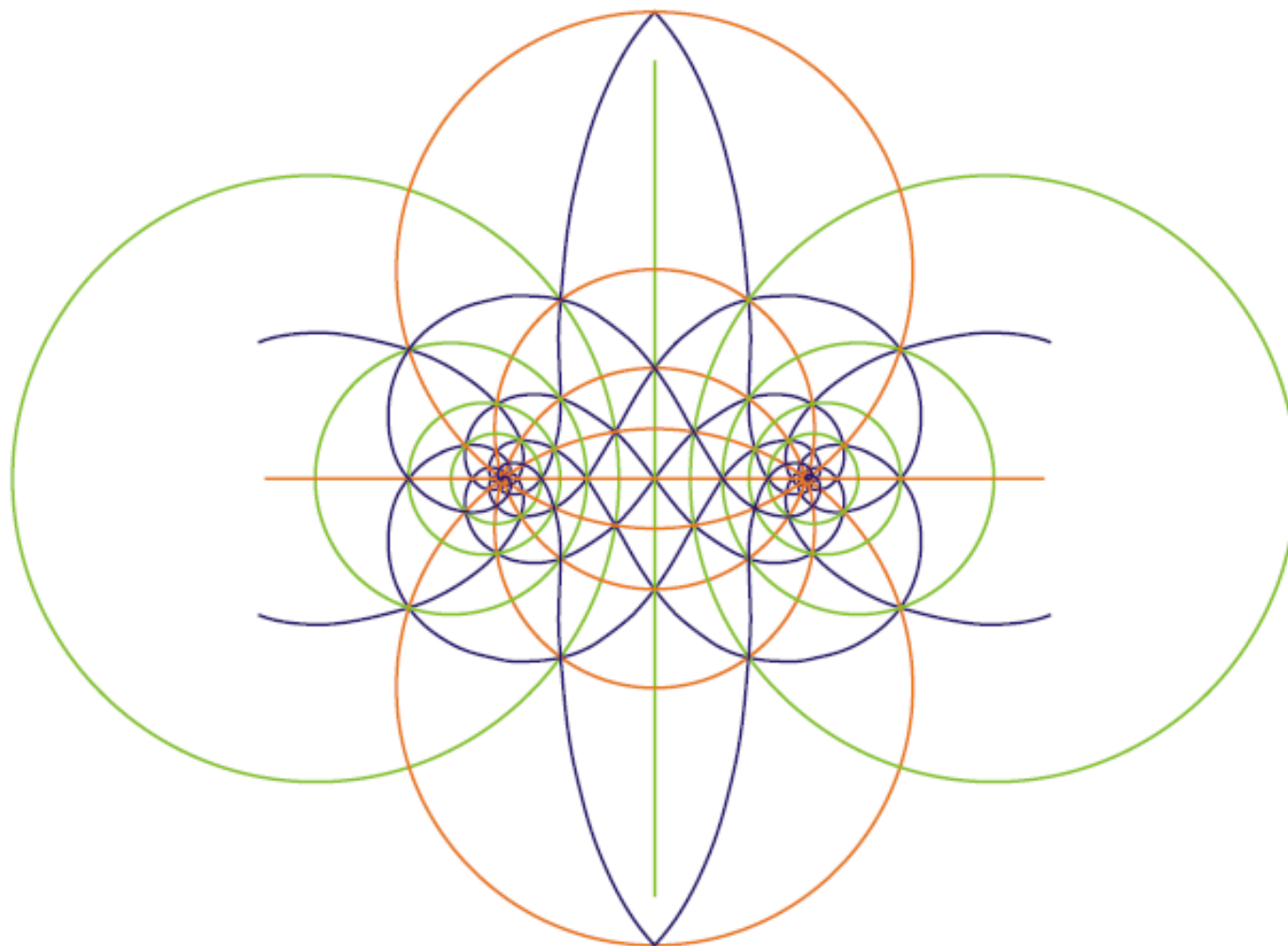
*Double spirals and Möbius maps*

67



D. Mumford *et al.* Indra's Pearls, 2002

# Водовороты



**Гомография Мёбиуса**  
**(группа дробно-линейных преобразований):**  
**элементарные операции симметрии**

1. Translation

$$w = z + z_0$$

2. Rotation

$$w = e^{i\varphi} z$$

3. Reflection

$$w = z^* \text{ (complex conjugate)}$$

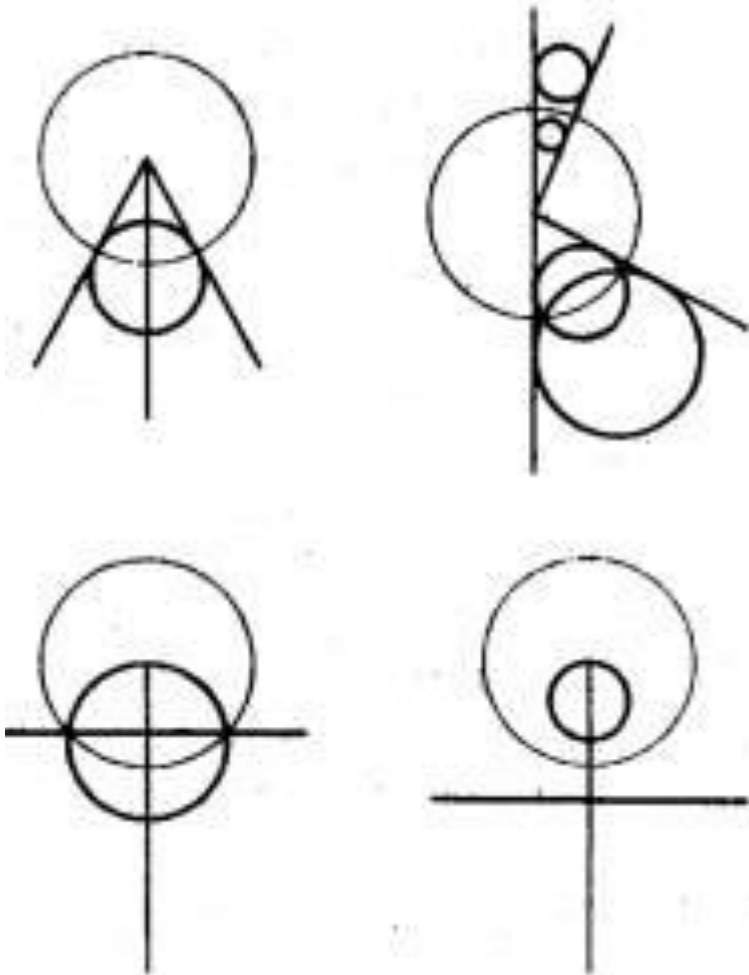
4. Scaling – homothety

$$w = k z$$

5. Reflection in circle - Möbius involution

$$w = 1 / z$$

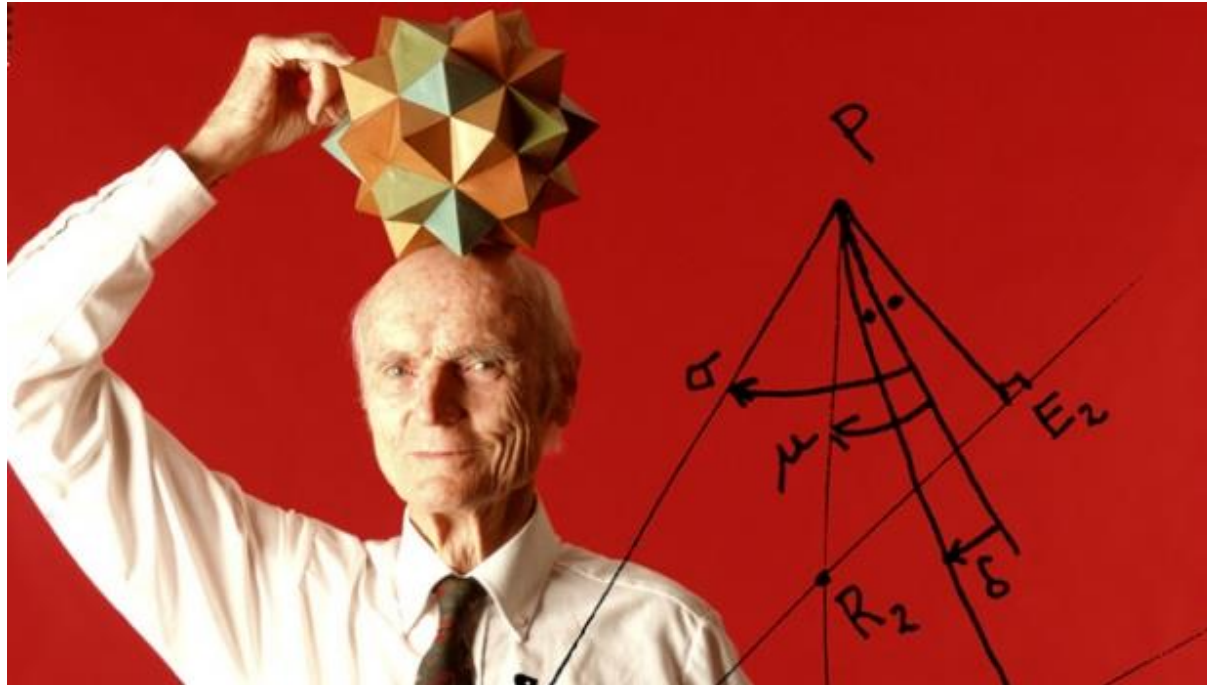
## Круговое свойство гомографии



Окружность всегда  
переходит в  
окружность

**Прямая  
эквивалентна  
окружности  
бесконечного  
радиуса**

## H.S.M. Coxeter



How Euclidean geometry, in which lines and planes play a fundamental role, can be extended to inversive geometry, in which this role is taken over by circles and spheres?

“Introduction to Geometry”

# Планируемые работы

1. Описание икосаэдрических квазикристаллов всех трех типов ( $P$ ,  $I$ ,  $F$ ) – неэквивалентные позиции.
2. Аналоги разбиения Пенроуза с осями симметрии более высоких порядков.
3. Симметрия самоподобия и отражения в цилиндрических зеркалах.
4. Самодуальные алмазоподобные кластеры.
5. Кулоновские решеточные суммы (экспоненциальная сходимость рядов).
6. Динамика решеток (учет вклада от магнитного поля).
7. Коррелированные твердые растворы (асимметрия кривой спинодального распада).
8. SiC, ISFET, апериодические детерминированные структуры.

**Спасибо за внимание**