

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук

на правах рукописи

**Гарбузов Федор Евгеньевич**

**Моделирование нелинейных волн и солитонов деформации  
в упругих и вязкоупругих телах**

1.3.8 — физика конденсированного состояния

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физико-техническом институте им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук.

Научный руководитель: **Бельтюков Ярослав Михайлович**  
к.ф.-м.н., зав. сектором физической кинетики и  
электроакустических явлений  
ФТИ им. А.Ф. Иоффе

Официальные оппоненты: **Порубов Алексей Викторович**  
д.ф.-м.н., зав. лаб. микромеханики материалов  
ИПМаш РАН

**Азовцев Андрей Валерьевич**  
к.ф.-м.н., с.н.с. лаб. динамики материалов  
ФТИ им. А.Ф. Иоффе

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего  
образования Санкт-Петербургский  
политехнический университет Петра Великого

Защита состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 г. в \_\_\_\_\_ на заседании  
диссертационного совета ФТИ 34.01.01 Федерального государственного  
бюджетного учреждения науки Физико-технического института им. А.Ф.  
Иоффе Российской академии наук по адресу Санкт-Петербург,  
Политехническая ул., д. 26.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Физико-  
технического института им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,  
[www.ioffe.ru](http://www.ioffe.ru).

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные  
печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого  
секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
ФТИ 34.01.01

Калашникова А. М., PhD

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** Изучение волн деформации в нелинейных средах и элементах конструкций является важным направлением современных исследований, представляющим интерес как с фундаментальной точки зрения, так и для практических приложений, например в задачах неразрушающего контроля. Традиционные методы неразрушающего контроля опираются на линейные упругие свойства материалов, однако различные нелинейные эффекты позволяют расширить получаемую информацию об исследуемом объекте. К числу таких эффектов относятся генерация высших гармоник, зависимость скорости от амплитуды волны, акустоупругий эффект, возникновение солитонов деформации и другие, а их применение позволит создать более совершенные методы неразрушающего контроля [1, 2].

Одним из важных нелинейных эффектов является возникновение солитонов деформации — уединённых волн, стабильность которых обеспечивается балансом между нелинейными характеристиками среды и дисперсией. Дисперсия акустических волн может возникать в результате дискретности среды — в таком случае при балансе с нелинейностью возникают ультракороткие солитоны нанометровой длины, распространяющиеся в объёме среды на расстояния до нескольких миллиметров [3, 4]. Другим источником дисперсии служит ограниченность поперечного размера упругого волновода — в этом случае имеют место длинные солитоны сантиметровой или большей длины в зависимости от толщины волновода [5, 6]. Изучение длинных солитонов деформации как инструментов интраспекции материалов и элементов конструкций является предметом продолжающихся исследований [7, 8].

Многие практически важные материалы, например полимеры или биологические мягкие ткани, помимо нелинейно-упругих свойств демонстрируют существенные вязкоупругие свойства. Ключевой особенностью вязкоупругих материалов являются эффекты памяти — влияние истории деформаций на текущее состояние, что выражается в запаздывающей связи напряжения с деформацией. В теоретических исследованиях нелинейных волн деформации вязкоупругими эффектами зачастую пренебрегают или используют простейшие линейные модели для их учёта [5, 9]. Лишь сравнительно недав-

но появились исследования волн в материалах с нелинейными эффектами памяти [10, 11], а последние экспериментальные исследования показали существенную зависимость нелинейных характеристик материала от частоты волны деформации [12]. В силу этого построение теории, учитывающей нелинейные эффекты памяти, и её применение к описанию волн деформации является важной современной задачей.

**Целью** работы является построение теоретических моделей, описывающих возникновение и распространение нелинейных волн и солитонов деформации в упругих и вязкоупругих волноводах, а также теоретическое описание частотно-зависимых нелинейных упругих характеристик материалов.

Для достижения целей поставлены следующие **задачи**:

1. Провести систематический асимптотический анализ уравнений нелинейной теории упругости и скорректировать при необходимости существующие волновые модели, описывающие нелинейные продольные волны деформации малой, но конечной амплитуды.

2. Разработать численный метод, позволяющий эффективно моделировать трёхмерные уравнения движения для тел со сложной нелинейной и запаздывающей зависимостью напряжения от деформации.

3. Проверить применимость асимптотических моделей, сопоставив описываемые ими солитоны с результатами трёхмерных расчётов динамики волн деформаций в нелинейно-упругих стержнях.

4. Построить математическую модель, позволяющую моделировать процесс зарождения солитонов деформации в упругом волноводе, наблюдавшийся до этого лишь экспериментально.

5. Построить общую теоретическую модель нелинейного вязкоупругого тела и применить её для описания частотно-зависимых модулей третьего порядка, наблюдаемых в экспериментах. Провести анализ этой модели.

**Научная новизна и практическая значимость.** Полученные в данной работе результаты представляют интерес как для фундаментального исследования волн деформации в нелинейно-упругих телах, так и для практического применения в задачах неразрушающего контроля материалов. Ре-

зультаты главы 2 уточняют модель солитонов деформации малой амплитуды в нелинейно-упругих волноводах и обобщают её на случай средних амплитуд. Результаты, полученные в главе 3, связывают теоретические исследования солитонов деформации с экспериментальными данными об их формировании, а также предоставляют способ наиболее общего описания частотной зависимости различных нелинейных волновых эффектов. Разработанный в главе 4 численный метод решения полных трёхмерных уравнений нелинейной теории вязкоупругости позволяет эффективно моделировать волны деформации в телах со сложным законом упругости, не прибегая к упрощённым моделям.

**Методология и методы исследования.** При выполнении работы применялись методы асимптотического анализа уравнений в частных производных, содержащих малый параметр: метод возмущений и многомасштабный метод. Кроме того использовались результаты из функционального и тензорного анализа, а также численные методы решения начально-краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных: метод спектрального элемента для пространственной дискретизации задачи и метод Рунге-Кутты для интегрирования во временной области.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. В рамках асимптотического анализа уравнений нелинейной теории упругости уточнены дисперсионные члены в уравнении типа Буссинеска, описывающем распространение длинных продольных волн малой, но конечной амплитуды в стержнях. Полученное уравнение более точным образом учитывает дисперсию продольных волн деформации в стержне, чем аналогичные уравнения известные из литературы.

2. В режиме средних амплитуд волны деформации описываются расширенным уравнением Кортвега-де Фриза, учитывающим нелинейные и дисперсионные эффекты следующего порядка. В случае, если упругие модули третьего или четвёртого порядка существенно превышают упругие модули второго порядка, то кубически-нелинейный эффект оказывается наиболее существенным среди эффектов следующего порядка, а волны деформации асимптотически описываются уравнением Гарднера.

3. В рамках формализма внутренних (скрытых) переменных и многоинтегрального подхода Грина-Ривлина построена новая наиболее общая

квадратично-нелинейная модель вязкоупругого материала. С помощью этой модели получена частотная зависимость упругих модулей третьего порядка в нелинейном вязкоупругом материале. Полученные зависимости позволяют описать сильную частотную зависимость акустоупругого эффекта в полистироле, наблюдавшуюся экспериментально.

4. В общем случае упругие модули третьего порядка являются функциями двух частот, поэтому наиболее полным образом их частотная зависимость проявляется при нелинейном взаимодействии двух волн на разных частотах. Амплитуда генерируемой гармоники на суммарной частоте предоставляет достаточно информации для определения частотно-зависимых упругих модулей третьего порядка.

**Достоверность** полученных в работе результатов подтверждается согласием между упрощёнными аналитическими моделями, полным трёхмерным моделированием и известными из литературы экспериментальными данными.

**Личный вклад автора.** Все исследования, представленные в данной диссертации, включая построение математических моделей и проведение численных расчётов, выполнены автором единолично. Постановка задач, анализ результатов, а также разработка программного кода для трёхмерных расчётов проведены совместно с научным руководителем.

**Апробация результатов.** Результаты диссертационного исследования изложены на ряде конференций, научных школ и семинаров: Физика А.СПб (Санкт-Петербург, 2016 и 2017 гг.), Нелинейные волны – 2018 (Нижний Новгород, 2018 г.), Days on diffraction (Санкт-Петербург, 2018 и 2021 гг.), Solitons, collapses and turbulence (Ярославль, 2019 г.), International conference of numerical analysis and applied mathematics (Родос, 2021 г.), Акустический семинар (Санкт-Петербург, 2021 г.), семинар математического отделения университета Nottingham Trent (Ноттингем, 2022 г.), Нелинейные дни в Саратове (2023 г.), Чайный семинар в ФТИ им. А.Ф. Иоффе (2024 г.) и семинар по механике в ИПМаш РАН (2024 г.).

**Публикации.** Результаты диссертационного исследования изложены в 8 печатных работах, список которых приведён в конце автореферата.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Диссертация изложена на 136 страницах и содержит 27 рисунков, 3 таблицы и библиографию из 145 наименований.

## Содержание работы

Во **введении** приведён краткий обзор работ, раскрывающих актуальность темы исследования, сформулированы цель и задачи диссертации, выделена научная новизна и практическая значимость результатов работы, приведены положения, выносимые на защиту, и перечень конференций и семинаров, на которых были доложены результаты диссертационного исследования. В завершение приведена информация о структуре и содержании диссертации.

**Глава 1** посвящена более детальному обзору литературы, составляющей контекст диссертационного исследования. Приведены основные работы по нелинейной волновой динамике, связанные с открытием особого класса устойчивых уединённых волн — солитонов, и их описанием в различных физических системах. Затем дан обзор ключевых работ по нелинейным волнам и солитонам деформации. Акцентируется внимание на объёмных солитонах в упругих волноводах и их потенциальному применению в задачах неразрушающего контроля: солитоны, распространяясь без изменения формы, сохраняют память о прохождении через дефектные участки, например, через область деляминации или утоньшения волновода. Возникновение солитонов является не единственным нелинейным эффектом, возникающим в нелинейно-упругих телах. В последней части главы приведён обзор работ, посвящённых применению других нелинейных эффектов для поиска внутренних повреждений в телах: генерации высших гармоник, нелинейному взаимодействию волн на разных частотах и проч.

**Глава 2** посвящена моделированию продольных волн деформации в нелинейно-упругих стержнях. Такая задача уже была рассмотрена в ряде работ, однако разные авторы использовали различные подходы и придерживались разной степени математической строгости. В результате получались различные волновые модели, причём некоторые из них обладали нежелательными математическими свойствами. Кроме того, внимание уделялось лишь достаточно длинным волнам по сравнению с толщиной волновода. Для устранения разногласий между различными источниками, в этой главе пересмотрена процедура выведения модели длинных продольных волн из полных уравнений нелинейной теории упругости, а также обсуждается



модель, пригодная для описания как длинных, так и коротких продольных волн, распространяющихся вдоль оси нелинейно-упругого стержня.

В **разделе 2.1** приведены основные сведения из нелинейной теории упругости. Нелинейно-упругий материал характеризуется, во-первых, учётом нелинейных слагаемых в тензоре деформаций  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[ \text{grad } \vec{U} + (\text{grad } \vec{U})^T + (\text{grad } \vec{U})^T \cdot \text{grad } \vec{U} \right], \quad (1)$$

где  $\vec{U} = \vec{U}(x, y, z, t)$  — вектор перемещений точек тела, имеющих в недеформированном состоянии координаты  $(x, y, z)$ ; а во-вторых, наличием неквадратичных слагаемых в выражении для упругой (потенциальной) энергии. При рассмотрении малых деформаций обычно применяют разложение упругой энергии в степенной ряд по тензору деформаций, удерживая в нём первые несколько порядков. В изотропном материале наиболее общее выражение плотности упругой энергии, содержащее квадратичные и кубические слагаемые, имеет вид

$$\Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1^2 - 2\mu I_2 + \frac{l + 2m}{3} I_1^3 - 2m I_1 I_2 + n I_3, \quad (2)$$

где  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  обозначают инварианты тензора деформаций  $\mathbf{E}$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  — модули упругости Ламе, а  $l$ ,  $m$  и  $n$  называют модулями Мурнагана [13]. Уравнения движения (баланса импульса) при отсутствии объёмных сил принимают вид

$$\rho \ddot{\vec{U}} = \text{div } \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = (\mathbf{I} + \text{grad } \vec{U}) \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{E}}. \quad (3)$$

где  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{S}$  — тензоры напряжений (первый и второй тензоры Пиолы–Кирхгофа),  $\rho$  — плотность недеформированного материала, а  $\mathbf{I}$  — единичный тензор. Эти уравнения должны быть дополнены граничными условиями: заданным перемещением или силой на поверхности тела.

**Раздел 2.2** посвящён выводу и анализу модели длинных продольных волн малой амплитуды. Проведена строгая асимптотическая процедура упрощения полных трёхмерных уравнений движения (3) с условием свободной границы для стержня круглого сечения (рис. 1), при этом в задаче выделено два малых параметра: амплитуда волн ( $\varepsilon$ ) и отношение поперечного размера волновода — радиуса стержня — к характерной длине волны ( $\delta$ ). Показано,

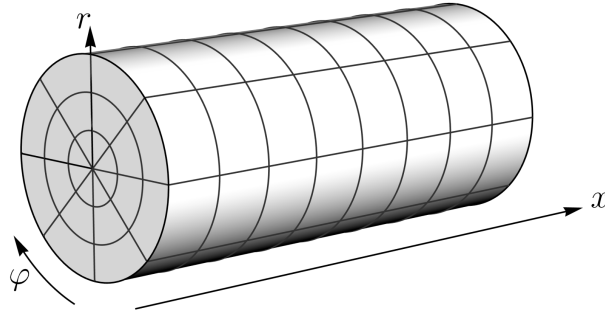


Рис. 1: Схема стержня круглого сечения.

что трёхмерная постановка задачи асимптотически сводится к классическому волновому уравнению с нелинейной поправкой порядка  $\varepsilon$  и дисперсионными поправками порядка  $\delta^2$ . Такое уравнение относится к классу уравнений типа Буссинеска и в размерной форме имеет вид:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u + \beta u^2) + R^2 \left( \frac{\alpha_1}{c^4} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\alpha_2}{c^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \alpha_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = 0, \quad (4)$$

где  $u = \partial U_x / \partial x \big|_{r=0}$  — линейная компонента продольной деформации на оси стержня,  $c = \sqrt{E/\rho}$  — скорость бесконечно малых продольных волн в бесконечно тонком стержне,  $\beta = 3/2 + (l(1 - 2\nu)^3 + 2m(1 + \nu)^2(1 - 2\nu) + 3n\nu^2)/E$  — нелинейный коэффициент,  $\alpha_1 = (5 - 5\nu - 6\nu^2 + 4\nu^3)/8(1 - \nu)$ ,  $\alpha_2 = (-7 + 7\nu + 2\nu^2)/8(1 - \nu)$  и  $\alpha_3 = 1/4$  — дисперсионные коэффициенты,  $R$  — радиус стержня,  $E$  — модуль Юнга, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Уравнение (4) выведено впервые, однако различные другие уравнения того же типа, описывающие нелинейные продольные волны в упругих стержнях, ранее уже были получены в литературе [5, 14]. Они совпадают с уравнением (4) в нелинейной части (имеют одинаковый коэффициент  $\beta$ ), но обладают разными дисперсионными слагаемыми. Более ранние модели либо опирались на упрощающие предположения о том, что сечение стержня остаётся плоским и деформируется равномерно, либо обладали нежелательным свойством — коротковолновой неустойчивостью (неограниченным ростом высоких гармоник), что затрудняло их численный расчёт. Уравнение (4) отмеченными недостатками не обладает и имеет наиболее точные среди уравнений типа Буссинеска дисперсионные характеристики (рис. 2) [15]. Верный учёт дисперсии важен для описания солитонов, поскольку их существование обусловлено балансом нелинейности и дисперсии.

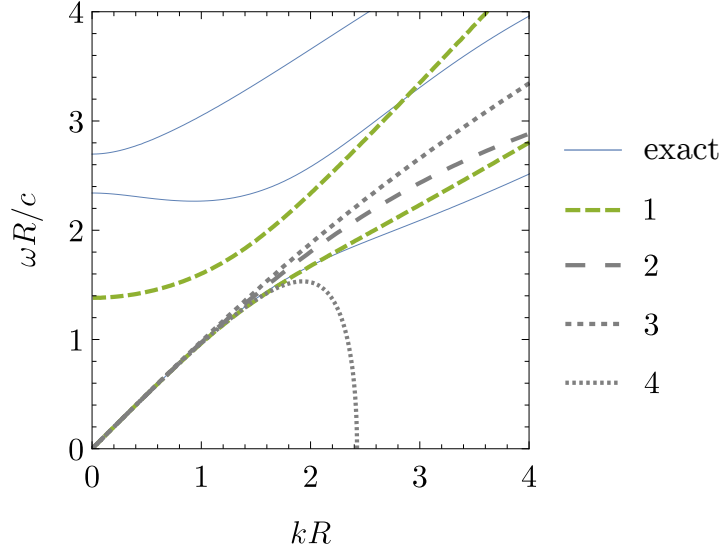


Рис. 2: Нормированные дисперсионные кривые длинных волн в упругом стержне с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.34$ . Сплошная линия — точная дисперсионная картина в линейном стержне, пунктирные линии — линеаризованные уравнения типа Бусинеска: 1 — уравнение (4), полученное в данной работе, 2, 3 и 4 — уравнения известные из литературы [5, 14].

Уравнение (4) обладает следующим семейством солитонных решений:

$$u(x, t) = A \cosh^{-2}\left(\frac{x \pm vt}{\Lambda}\right), \quad (5)$$

$$v = c\sqrt{1 + \frac{2A\beta}{3}}, \quad \Lambda = 2R\sqrt{-\frac{\alpha_1(v/c)^4 + \alpha_2(v/c)^2 + \alpha_3}{(v/c)^2 - 1}}, \quad (6)$$

где  $A$  является свободным параметром семейства и определяет амплитуду солитона, величина  $\Lambda$  определяет ширину солитона, а сам солитон имеет колоколообразный вид с экспоненциально убывающими хвостами. При малых амплитудах деформации (для которых и строилась модель) скорость и ширина солитона (5) с точностью до слагаемых более высокого порядка малости равны скорости и длине солитона Кортевега–де Фриза:

$$v \approx v_{\text{КдВ}} = c\left(1 + \frac{A\beta}{3}\right), \quad \Lambda \approx \Lambda_{\text{КдВ}} = \frac{R|\nu|}{\sqrt{v_{\text{КдВ}}/c - 1}}, \quad \text{при } |A| \ll 1, \quad (7)$$

где учтено, что  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\nu^2/2$ . Это следует из известного в теории нелинейных волн факта о том, что длинные волны малой амплитуды, являющиеся решением уравнения типа Бусинеска (4), асимптотически описываются

уравнением Кортевега–де Фриза (КдФ):

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + (1 + \beta u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu^2 R^2}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (8)$$

На рис. 3 представлено сравнение параметров солитонов в рамках нелинейных волновых моделей типа Буссинеска (4), КдФ (8) и в рамках расчёта полных трёхмерных уравнений (3) с условием свободной границы. При достаточно малых амплитудах обе модели одинаково хорошо соответствуют точной зависимости скорости и полуширины солитона от его амплитуды, полученной в трёхмерном расчёте. Однако с увеличением амплитуды эти модели показывают заметное расхождение с трёхмерными уравнениями, что говорит о влиянии неучтённых в уравнениях типа Буссинеска и КдФ эффектов. Этим эффектам посвящён следующий раздел.

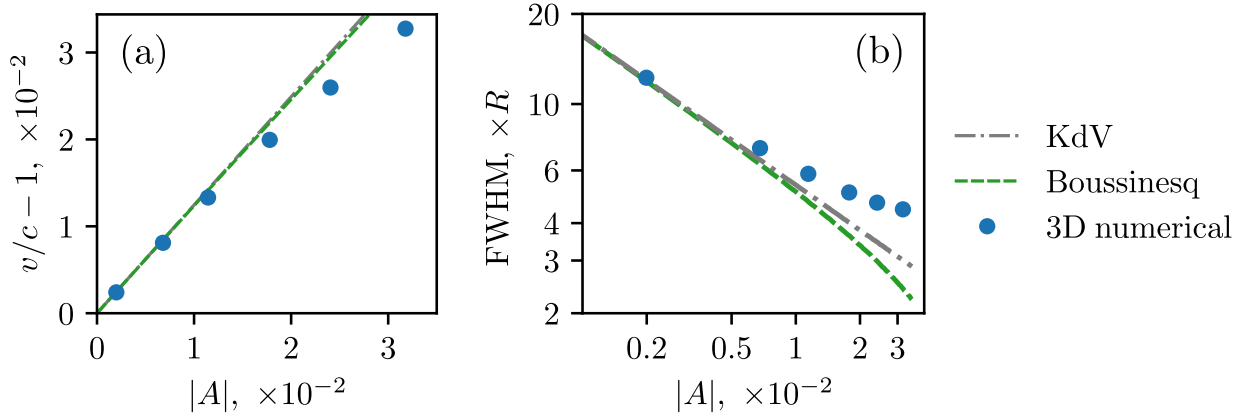


Рис. 3: Зависимости нормированной скорости (а) и ширины на половине высоты (б) от амплитуды солитонов в полистироловом стержне радиуса  $R$  в рамках моделей Кортевега–де Фриза, Буссинеска и полных трёхмерных уравнений. Полуширина приведена в единицах  $R$ .

**Раздел 2.3** обобщает описанную выше теорию на случай волн средних амплитуд деформаций, при которых существенными оказываются эффекты более высокого порядка малости. Во многих материалах модули упругости четвёртого порядка заметно превышают по абсолютному значению модули третьего порядка, а те в свою очередь заметно больше модулей второго порядка [16]. Особенно велико отличие модулей разных порядков в наноструктурированных материалах: нелинейно-упругие свойства в результате добавления в материал наночастиц могут претерпевать на несколько порядков более существенные изменения, чем линейные [17, 18]. В таких материалах, как

показывают результаты данного раздела, средние деформации могут иметь относительно небольшую (не превышающую порог упругости) величину.

Нелинейно-упругие эффекты следующего порядка в изотропном материале учитываются расширенным по сравнению с формулой (2) выражением потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1^2 - 2\mu I_2 + \frac{l + 2m}{3} I_1^3 - 2m I_1 I_2 + n I_3 \\ + \nu_1 I_1^4 + \nu_2 I_1^2 I_2 + \nu_3 I_1 I_3 + \nu_4 I_2^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  и  $\nu_4$  — модули упругости Мурнагана четвёртого порядка, которые следует отличать от коэффициента Пуассона, обозначаемого буквой  $\nu$  без каких-либо индексов. Систематический учёт эффектов следующего порядка требует учёт и более высокой дисперсии в силу баланса нелинейности и дисперсии. Асимптотический анализ приводит к расширенному уравнению КдФ, включающему ряд дополнительных слагаемых: кубическое  $\partial(u^3)/\partial x$ , несколько квадратичных и пятую производную  $\partial^5 u/\partial x^5$ . Для нахождения асимптотических решений этого уравнения применяют почти тождественные (near-identity) преобразования, позволяющие свести его к обычному уравнению КдФ [19]. Однако во многих материалах модули упругости следующего порядка существенно превышают модули предыдущего порядка, поэтому коэффициент при кубическом слагаемом часто оказывается большим по сравнению с остальными коэффициентами в расширенном КдФ. Для получения модели, пригодной для описания волн деформации в максимальном диапазоне амплитуд, почти тождественные преобразования в данной работе были модифицированы таким образом, чтобы они сохраняли кубическое слагаемое. Получаемое в результате уравнение называется уравнением Гарднера:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \left( 1 + \beta u + \frac{3}{2} \gamma_{\text{ni}} u^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu^2 R^2}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (10)$$

в котором кубический коэффициент  $\gamma_{\text{ni}}$  является комбинацией отношений модулей упругости третьего порядка  $l, m, n$  к модулю Юнга  $E$  второго порядка, квадратов этих отношений и отношений модулей четвёртого порядка

$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$  к модулю Юнга:

$$\gamma_{\text{ni}} = \gamma - \frac{(1+2\nu)\beta}{9} + \frac{(7-65\nu^2+57\nu^4)\beta^2}{81\nu^2(1-\nu^2)} - \frac{4\beta}{9\nu} \left( \frac{\beta}{9} + \beta_2 \right), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \gamma = -\frac{5}{2} + 2\beta - \frac{4\beta_2^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{4}{E} (\nu_1(1-2\nu)^4 - \nu_2(2-\nu)\nu(1-2\nu)^2 \\ + \nu_3(1-2\nu)\nu^2 + \nu_4(2-\nu)^2\nu^2), \quad (12) \end{aligned}$$

где  $\beta_2 = (l(1-2\nu)^2 + 2m\nu(1+\nu) - n\nu)(1+\nu)(1-2\nu)/E$  — вспомогательный коэффициент, имеющий схожую с  $\beta$  структуру (вид  $\beta$  приведён в пояснении к уравнению (4)). Несмотря на громоздкий вид, выражения (11) и (12) показывают, что типичная для многих материалов ситуация  $|\nu_1|, |\nu_2|, |\nu_3|, |\nu_4| \gg |l|, |m|, |n| \gg E$  почти наверняка приводит к  $|\gamma_{\text{ni}}| \gg |\beta|$ .

Уравнение Гарднера (10) обладает следующим семейством солитонных решений:

$$u(x, t) = \frac{A}{B + (1-B) \cosh\left(\frac{x-v_G t}{\Lambda_G/2}\right)}, \quad (13)$$

$$v_G = c \left( 1 + \frac{A\beta}{3} + \frac{A^2\gamma_{\text{ni}}}{4} \right) = v_{\text{KdV}} + \frac{cA^2\gamma_{\text{ni}}}{4}, \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{v_{\text{KdV}} - c}{v_G - c}, \quad \Lambda_G = \frac{R|\nu|}{\sqrt{v_G/c - 1}}, \quad (15)$$

где  $A$  является свободным параметром. При достаточно малых амплитудах  $|A| \ll |\beta/\gamma_{\text{ni}}|$  такой солитон эквивалентен солитону КдФ, определяемого формулами (5) и (7), но при амплитудах  $|A| \sim |\beta/\gamma_{\text{ni}}|$ , называемых в данной работе средними, принимает вид либо узкого солитона в случае  $\gamma_{\text{ni}} > 0$ , либо широкого солитона в случае  $\gamma_{\text{ni}} < 0$ . Последний известен также как солитон с плоским верхом (table-top soliton) или флатон (flaton), а его отличительной особенностью является наличие критической амплитуды  $|2\beta/3\gamma_{\text{ni}}|$ , превышать которую широкий солитон не может. Оба случая проиллюстрированы на рис. 4 на примере двух модельных материалов, у которых модули упругости второго и третьего порядков совпадают с модулями полистирола [20], а модули четвёртого порядка подобраны так, чтобы при амплитуде деформации 2% отчётливо выделялись случаи широкого и узкого солитонов.

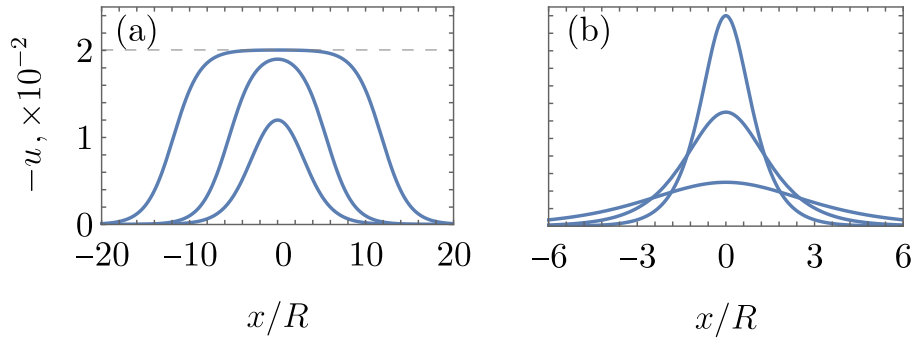


Рис. 4: Солитоны Гарднера (13). Панель (a) — случай широкого солитона ( $\gamma_{ni} < 0$ ) при различных амплитудных параметрах  $A$ . Панель (b) — то же, что и (a) в случае узкого солитона ( $\gamma_{ni} > 0$ ). Пунктир на панели (a) — предельная амплитуда широкого солитона.

Для проверки применимости асимптотической модели (10) на основе её солитонного решения (13) было построено начальное условие для трёхмерного расчёта полных уравнений движения (3) с условием свободной границы. Применяемый в данной работе численный метод подробно описан в главе 4. На рисунке 5a показаны результаты расчёта в случае широкого солитона, а на рисунке 5b — в случае узкого. Несмотря на преобразования, которые претерпевает начальный солитон в трёхмерном расчёте, свойства итогового солитона аналогичны свойствам солитона Гарднера (13).

Для проверки применимости модели Гарднера к описанию солитонов деформации построены зависимости скорости и полуширины солитонов от их амплитуды (рис. 6). На графиках оранжевой линией показаны зависимости, соответствующие солитону Гарднера (13). Для сравнения изображена кривая, соответствующая модели, предложенной в [21] — солитон Гарднера с кубическим коэффициентом  $\gamma$  (формула (12)) вместо  $\gamma_{ni}$  (формула (11)), однако такая модель не является строго асимптотической. На рисунках видно, что модель с коэффициентом  $\gamma_{ni}$  лучше всего количественно описывает значения, полученные при численном моделировании полных трёхмерных уравнений, причём как по скорости, так и по ширине солитона.

Полученные в данном разделе результаты позволяют объяснить отклонение зависимостей скорости и полуширины солитона от его амплитуды от точных зависимостей на рис. 3. Результаты трёхмерного расчёта на этом рисунке получены для полистирола, у которого модули упругости второго и третьего порядков приведены в работе [20], а модули четвёртого порядка равны нулю.

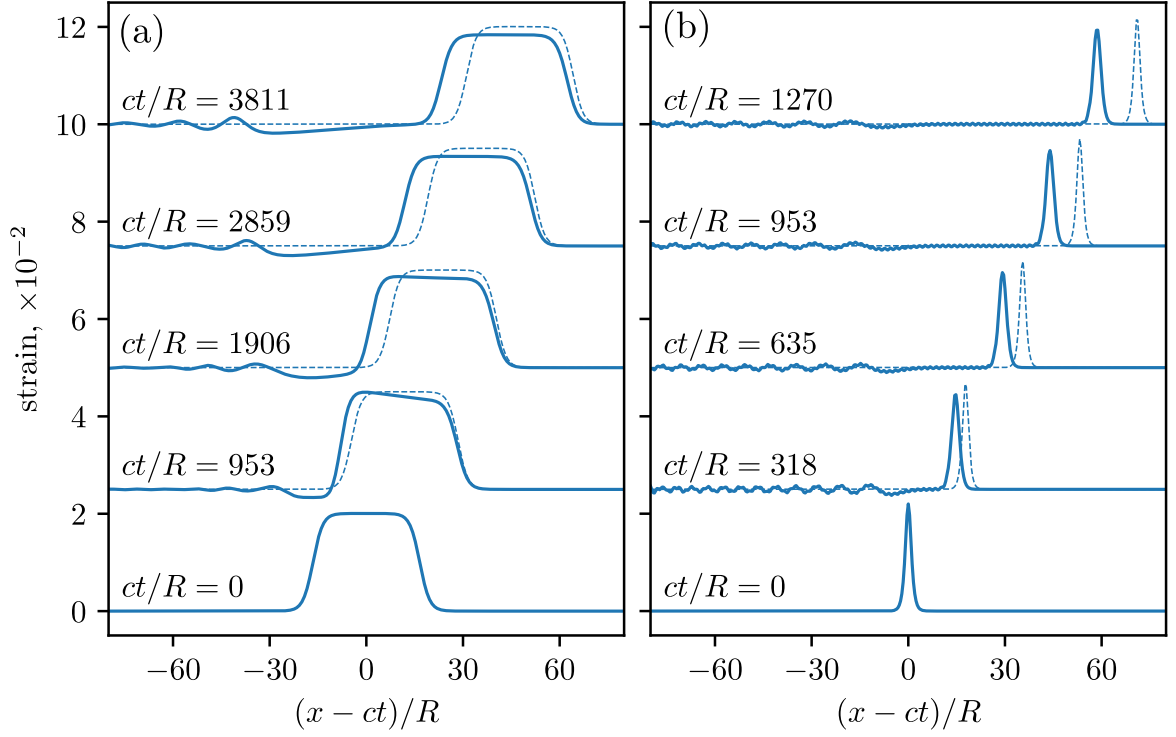


Рис. 5: Сравнение трёхмерных расчётов с уравнением Гарднера. Сплошная линия — отрицательная линейная продольная деформация на оси стержня  $-\frac{\partial}{\partial x}U(x, r, t)|_{r=0}$  в разные моменты времени. Координата и время приведены в единицах  $R$  и  $R/c$  соответственно. Применён вертикальный сдвиг на 2.5 для разделения профилей в разные моменты времени. Панель (a) — случай широкого солитона, пунктиром показан солитон Гарднера, распространяющийся согласно формуле (13) без изменения формы и скорости. Панель (b) — то же, что и на панели (a) в случае узкого солитона.

Несмотря на это, кубический коэффициент в уравнении Гарднера  $\gamma_{\text{ni}} = -31$  оказался достаточно большим по сравнению с  $\beta = -3.7$  и соответствует случаю широкого солитона. Зависимости скорости и полуширины от амплитуды солитона для полистирола с малыми (равными нулю) модулями четвертого порядка показаны на рис. 7.

В разделе 2.4 рассмотрена задача о распространении как длинных, так и коротких продольных волн в стержне. При моделировании волн деформации в упругих волноводах обычно применяют длинноволновое приближение, однако короткие волны, возникнув в стержне, в силу нелинейности могут взаимодействовать с длинными, поэтому имеет смысл построить упрощённую (пространственно одномерную) модель, применимую как для длинных, так и для коротких волн. Отказ от длинноволнового приближения не позволяет построить упрощённую модель в рамках строгого асимптотического анали-



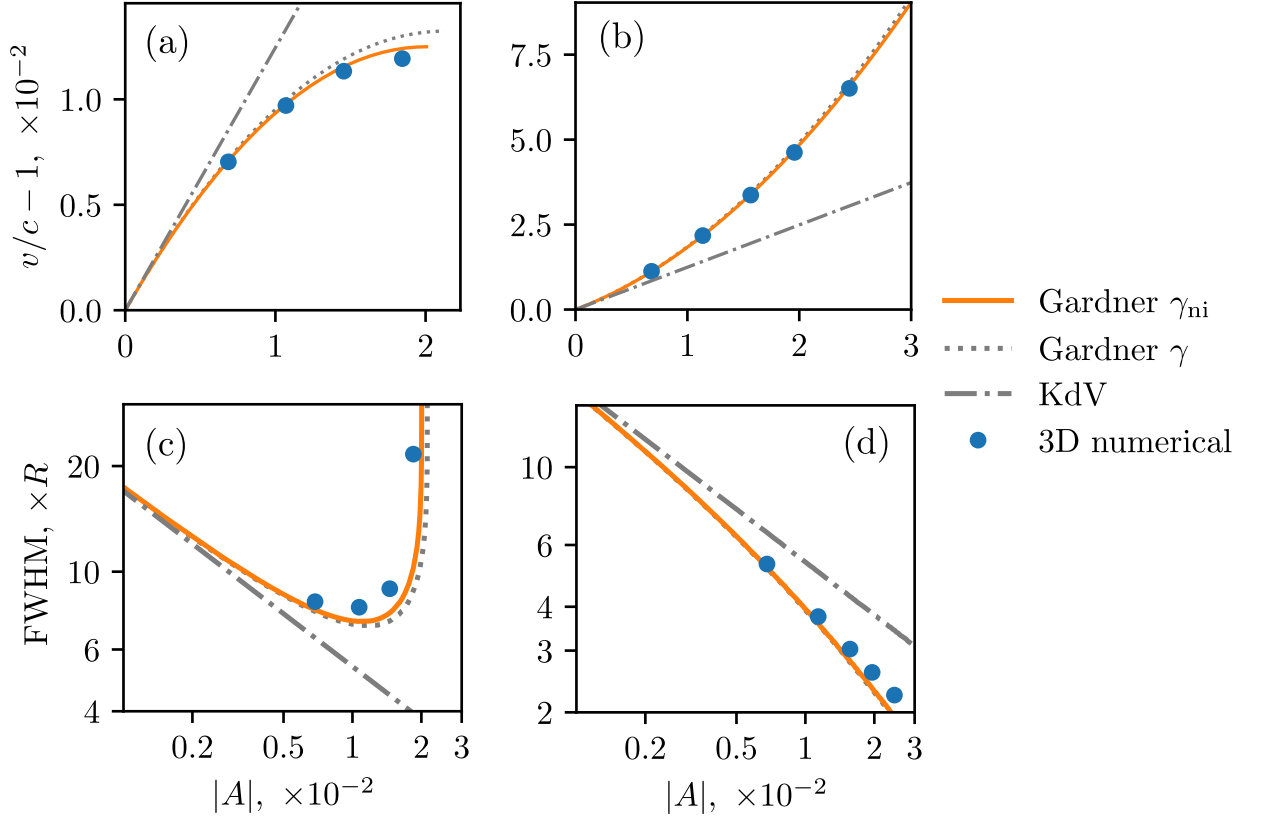


Рис. 6: Зависимости скорости солитонов и ширины на половине высоты от их амплитуды. Панели (a) и (c) — случай широкого солитона. Панели (b) и (d) — случай узкого солитона. Легенда: оранжевая линия — солитон Гарднера (13), точечная линия — солитон Гардрена с кубическим коэффициентом  $\gamma$  вместо  $\gamma_{ni}$ , штрих-пунктир — солитон КдФ (5), (7).

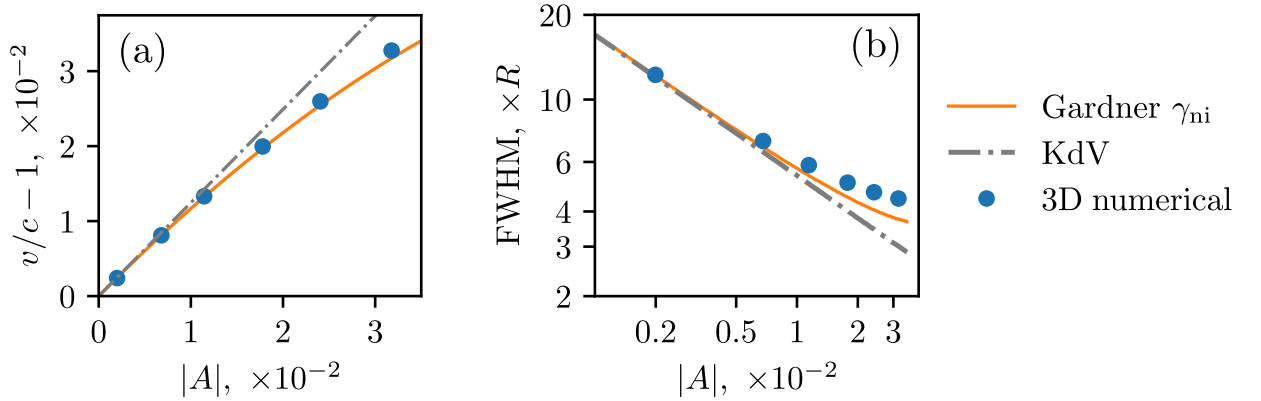


Рис. 7: То же, что и на рис. 6 при нулевом значении модулей четвертого порядка:  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0$ .

за полных уравнений (3). Однако в данном разделе показано, что применение простого предположения о плоских равномерно деформируемых сечениях волновода позволяет получить упрощённую нелинейную модель, описывающую все основные предельные случаи для продольных волн в упругом вол-

новоде: Р-волны со скоростью  $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  в пределе бесконечно малых деформаций и коротких волн, стержневые волны со скоростью  $c = \sqrt{E/\rho}$  в пределе бесконечно малых деформаций и длинных волн, а также длинные солитоны в случае малых, но конечных деформаций. Описанная модель представляет собой систему двух уравнений относительно продольного (осевого) перемещения точек поперечного сечения стержня  $U(x, t)$  и величины равномерной деформации сечения  $w(x, t)$ :

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f_{\text{nl}}}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2}{R_*^2} \left( \lambda \frac{\partial U}{\partial x} + 2(\lambda + \mu)w + g_{\text{nl}} \right), \quad (17)$$

где  $R_*$  — радиус инерции поперечного сечения стержня, равный  $R/\sqrt{2}$  в случае круглого сечения радиуса  $R$ , а нелинейные слагаемые, обозначенные  $f_{\text{nl}}$  и  $g_{\text{nl}}$ , для краткости здесь не приведены.

Представленные в данном разделе результаты важны, в частности, для моделирования зарождения солитонов деформации, поскольку в экспериментальных исследованиях именно из короткой волны возникает длинный солитон деформации [5]. Однако, поскольку для моделирования этого процесса необходимо дополнительно учесть вязкоупругие свойства волновода, то более детально этой задаче уделено место в следующей главе.

**Глава 3** посвящена обобщению теории нелинейных волн в упругих телах на случай вязкоупругого материала, поскольку известно, что многие нелинейно-упругие материалы, например полимеры, демонстрируют существенные вязкоупругие свойства. Вязкоупругость предполагает запаздывающую связь напряжения с деформацией материала, что приводит к диссипации механической энергии волн, а также к частотной зависимости упругих характеристик материалов. Линейные подходы к моделированию вязкоупругости, например стандартное линейное тело, находят широкое практическое применение, тогда как теория нелинейной вязкоупругости по-прежнему находится в стадии развития.

Глава начинается с изложения основных положений теории вязкоупругих материалов в **разделе 3.1**. Для моделирования диссипационных (неравновесных) процессов в термодинамике часто применяется подход, в рамках

которого для определения текущего состояния системы вводится набор внутренних или скрытых переменных состояния, каждая из которых подчиняется некоторому эволюционному уравнению. В термомеханике сплошных сред внутренние переменные позволяют определить запаздывающую связь между напряжением  $\mathbf{S}$  и деформацией  $\mathbf{E}$ , в общем случае принимающую вид

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots), \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{E}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

где  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots$  — внутренние переменные состояния, а вид функций  $\mathbf{S}(\dots)$  и  $\mathbf{f}_s(\dots)$  определяет механические свойства конкретного материала [22].

Одним из наиболее общих и распространённых подходов к моделированию вязкоупругости является обобщённая модель Максвелла, называемая также обобщённым стандартным линейным телом. В рамках этой модели напряжение предполагается линейной комбинацией деформации  $\mathbf{E}$  и внутренних переменных (внутренних деформаций)  $\mathbf{E}_s$ , каждая из которых подчиняется релаксационному процессу с характерным временем  $\tau_s$ :

$$\mathbf{S}^{(\text{lin})}(t) = \mathbf{C}_0 : \mathbf{E}(t) + \sum_s \mathbf{C}_s : \mathbf{E}_s(t), \quad (20)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_s + \frac{\mathbf{E}_s}{\tau_s} = \dot{\mathbf{E}}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (21)$$

где  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots$  — тензоры четвёртого порядка, характеризующие вязкоупругие свойства материала для соответствующего времени релаксации  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , тензор  $\mathbf{C}_0$  определяет квазистатические упругие свойства материала, а двоеточие обозначает двойное суммирование по индексам:  $(\mathbf{C}_0 : \mathbf{E})_{ij} = \sum_{kl} C_{0ijkl} E_{kl}$ . Важно отметить, что эволюционные уравнения (21) легко интегрируются, что позволяет в явном виде выразить запаздывающую связь напряжения с деформацией [23]:

$$\mathbf{S}^{(\text{lin})}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{C}(t - t_1) : \dot{\mathbf{E}}(t_1) dt_1, \quad \mathbf{C}(t) = \mathbf{C}_0 + \sum_s \mathbf{C}_s e^{-\frac{t}{\tau_s}}. \quad (22)$$

Обобщённую модель Максвелла часто иллюстрируют в случае одномерных деформаций с помощью системы демпферов и пружин, изображённую на рис. 8. В одномерном случае все тензоры являются скалярами, а связь

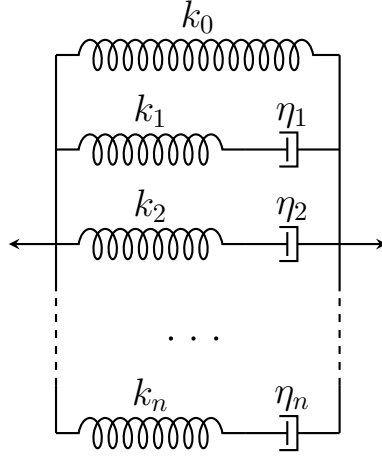


Рис. 8: Схема обобщённого стандартного линейного тела (обобщённой модели Максвелла).

скалярного напряжения  $\sigma$  и скалярной деформации  $\varepsilon$  представляется в виде

$$\sigma(t) = k_0\varepsilon(t) + \sum_s k_s\varepsilon_s(t), \quad \dot{\varepsilon}_s + \frac{\varepsilon_s}{\tau_s} = \dot{\varepsilon}. \quad (23)$$

В таком представлении время релаксации элемента с номером  $s$ , состоящего из пружины и демпфера равно отношению вязкости демпфера к упругому модулю пружины:  $\tau_s = \eta_s/k_s$ .

В разделе 3.2 проведено моделирование процесса зарождения солитона деформации в изотропном нелинейно-упругом и линейно-вязком стержне в результате воздействия ударной волны на его торец. Для построения определяющего соотношения материала стержня комбинируются подходы, описанные в разделах 2.1 и 3.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \lambda_0 \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{E} + 2\mu_0 \mathbf{E} + \sum_{s=1}^R (\lambda_s \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{E}_s + 2\mu_s \mathbf{E}_s) \\ & + l(\operatorname{tr} \mathbf{E})^2 + 2m(\mathbf{E} \operatorname{tr} \mathbf{E} - \mathbf{I} I_2) + n(\mathbf{I} I_2 - \mathbf{E} \operatorname{tr} \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}), \end{aligned} \quad (24)$$

где учтено, что в изотропном теле  $(\mathbf{C}_s)_{ijkl} = \lambda_s \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_s (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ , внутренние деформации  $\mathbf{E}_s$  подчиняются уравнениям (21), а  $I_2 = ((\operatorname{tr} \mathbf{E})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{E}^2)/2$  — второй инвариант тензора деформаций. Применение такой модели, как следует из самой формулы, разумно, если нелинейные эффекты, величина которых определяется модулями  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , и вязкие диссипационные эффекты, определяемые модулями  $\lambda_s$  и  $\mu_s$ ,  $s \geq 1$ , вносят сопоставимый вклад

в тензор напряжений.

Для моделирования зарождения солитона применялось два подхода: первый — трёхмерное моделирование полных уравнений движения (3) с учётом соотношения (24), а второй — на основе упрощённой модели (16), (17), описанной в разделе 2.3. Для обобщения последней на случай вязкоупругого материала, введены операторы  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\mu}$ , действующие на произвольную функцию  $f$  следующим образом:

$$\hat{\lambda}f(t) = \sum_s \lambda_s \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t_1}{\tau_s}} \dot{f}(t_1) dt_1, \quad \hat{\mu}f(t) = \sum_s \mu_s \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t_1}{\tau_s}} \dot{f}(t_1) dt_1 \quad (25)$$

Тогда одномерная модель будет иметь вид уравнений (16) и (17), где умножение на константные модули Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  заменено на действие приведённых выше операторов  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\mu}$ . Метод трёхмерного численного моделирования подробно описан в главе 4.

Для сопоставления результатов моделирования с экспериментальными данными были определены реалистичные параметры полистирола, а также граничное условие, моделирующее падающую ударную волну на торец стержня. Оказалось, что нелинейные эффекты не оказывают заметного влияния на моделируемый процесс (начальный этап формирования солитона), поэтому демонстрируемые далее результаты моделирования получены в рамках линеаризованных моделей.

Сравнение результатов моделирования с учётом вязкости и без неё в рамках упрощённых одномерных и полных трёхмерных уравнений показано на рис. 9. Как в трёхмерном, так и в одномерном случае наблюдается формирование лидирующей длинной волны из начальной короткой волны. Положение, амплитуда и ширина лидирующей длинной волны во всех случаях примерно одинаковы, однако одномерная модель имеет небольшие колебания вблизи фронта основной волны, а также несколько иную форму хвоста позади основной волны. В рамках моделей без вязких эффектов лидирующая длинная волна оказывается похожей на ту, что получится при вязкоупругом моделировании, однако помимо неё имеется множество коротковолновых колебаний, затухающих в вязкоупругом случае. Вязкоупругие эффекты особенно важны для полного трехмерного моделирования, результаты которого более подроб-

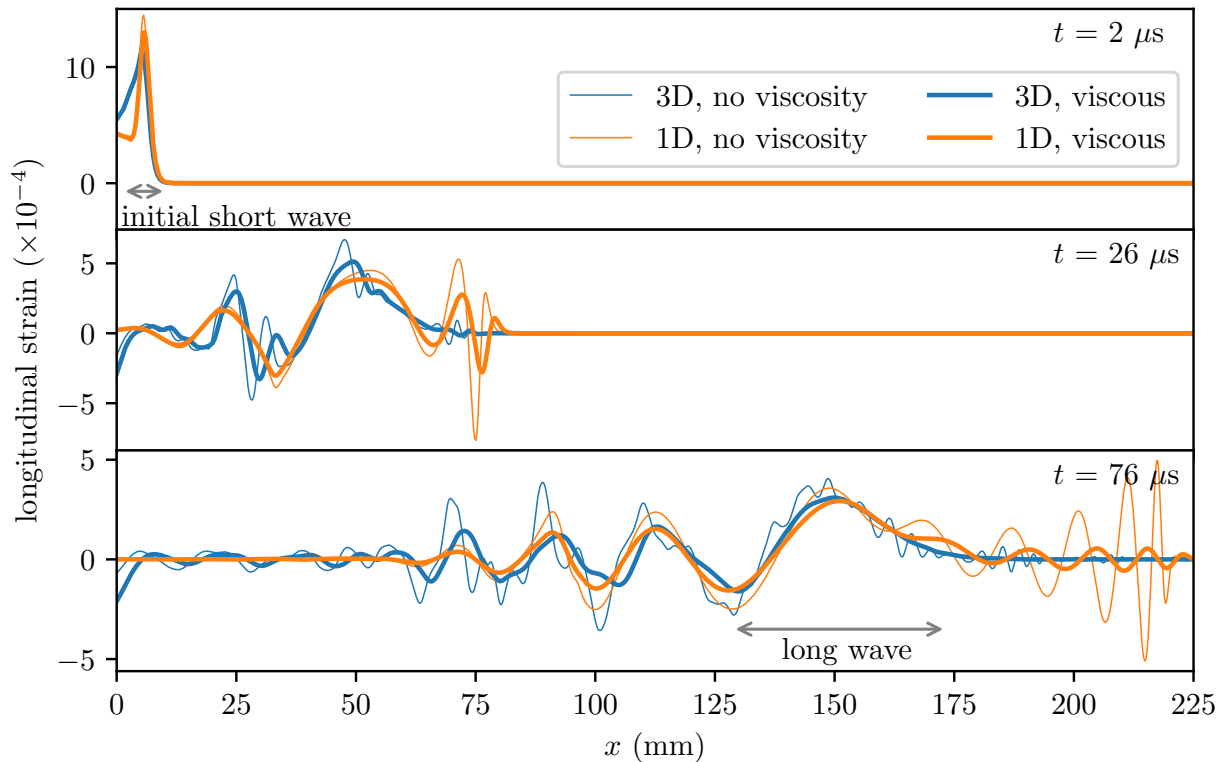


Рис. 9: Продольная деформация, усредненная по поперечному сечению, как функция координаты  $x$  вдоль стержня. Сравнение полной трехмерной модели и упрощенной одномерной модели с вязкостью и без.

но представлены на рис. 10: в невязком случае формирование длинной волны почти полностью скрыто множеством коротких волн.

Сравнение профилей основной волны, полученной при трёхмерном моделировании, с экспериментальными данными показано на рис. 11. Видно, что форма этой волны, наблюдаемая в разные моменты времени в эксперименте, адекватно воспроизводится при численном моделировании. Таким образом, трёхмерная модель учитывает все необходимые свойства материала волновода, ответственные за формирование лидирующей длинной волны деформации. Поскольку трёхмерную модель можно свести к простой одномерной модели без существенной потери точности, можно сделать вывод, что именно дисперсия продольных волн в волноводе, а также вязкоупругие свойства материала приводят к образованию длинной волны. Дисперсионные эффекты заключаются в отражении распространяющейся упругой волны от боковой поверхности и концентрации энергии внутри волновода, а вязкоупругие эффекты подавляют коротковолновые колебания, сохраняя лишь длинные волны. Дальнейшее распространение длинной волны можно описать с точки зрения динамики солитонов, обсуждавшейся в главе 2.

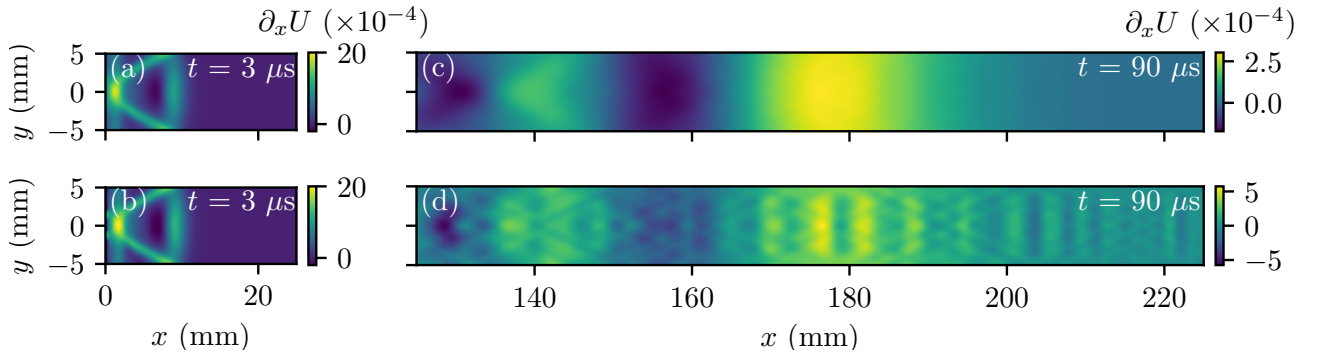


Рис. 10: Результаты трёхмерного численного моделирования стержня в рамках обобщённой модели Максвелла (панели a и c) и без вязкости (панели b и d). На рисунках изображена линейная компонента продольной деформации  $\frac{\partial}{\partial x}U$  как функция координат  $x$  и  $y$  при  $z = 0$  (срез вдоль оси стержня) на раннем и позднем моменте времени.

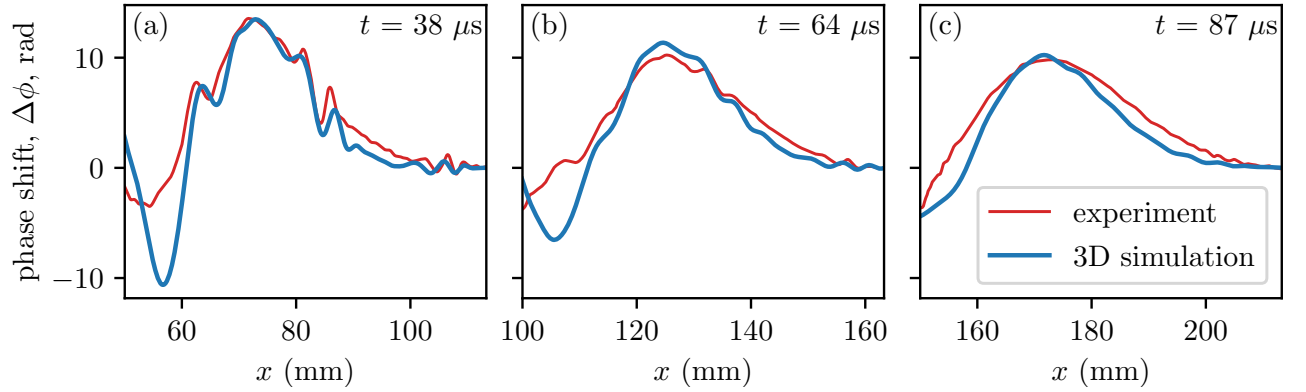


Рис. 11: Сравнение экспериментально полученных профилей волны деформации в полистироловом стержне с результатами трёхмерного численного моделирования в три разных момента времени.

**Раздел 3.3** посвящён обобщению нелинейно-упругого и линейно-вязкого материала на нелинейно-вязкоупругий случай. Мотивацией этой работы послужили недавние экспериментальные исследования, показавшие значительное (на порядок) увеличение эффективных модулей упругости Мурнагана некоторых стеклообразных полимеров при уменьшении частоты волны, используемой для их измерения при помощи акустоупругого эффекта [12]. Такая чувствительность к частоте может оказывать сильное влияние на динамику волн деформации, приводя в конечном итоге к возникновению длинных солитоноподобных волн, спектр которых лежит преимущественно в низкочастотной области. Важным приложением данной работы может стать неразрушающий контроль материалов, поскольку частотная зависимость модулей

упругости предоставляет дополнительную информацию об исследуемом образце и может существенно различаться даже для полимерных материалов одного типа, но изготовленных по разным технологиям [18].

В данной работе показано, что наиболее общей квадратично-нелинейной вязкоупругой моделью является

$$\mathbf{S} = \sum_s \mathbf{C}_s : (\mathbf{E}_s + \Delta \mathbf{E}_s) + \sum_{su} \mathbf{N}_{su} :: \mathbf{E}_s \mathbf{E}_u, \quad (26)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_s + \frac{\mathbf{E}_s}{\tau_s} = \dot{\mathbf{E}}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{E}_s}{\partial t} + \frac{\Delta \mathbf{E}_s}{\tau_s} = \sum_{uv} \mathbf{B}_{suv} :: \mathbf{E}_u \mathbf{E}_v. \quad (28)$$

где тензоры  $\mathbf{C}_s$  четвёртого порядка и тензоры  $\mathbf{N}_{su}$  и  $\mathbf{B}_{suv}$  шестого ранга характеризуют линейные и квадратично-нелинейные вязкоупругие свойства материала соответственно, а  $\Delta \mathbf{E}_s$  — нелинейные внутренние переменные. Слагаемые, характеризующие квазистатические упругие свойства в выражении тензора напряжений (26), для краткости не выписаны отдельно, поскольку для их учёта можно положить одно из времён релаксации достаточно большим или бесконечным:  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . Данная модель получена путём добавления в обобщённую модель Максвелла (20) – (21) всевозможных квадратичных слагаемых.

Запаздывающая связь напряжения с деформацией, определяемая выражениями (26) – (28) с внутренними переменными, может быть переписана в явном интегральном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) = & \int_{-\infty}^t \mathbf{C}(t - t_1) : \dot{\mathbf{E}}(t_1) dt_1 \\ & + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \mathbf{N}(t - t_1, t - t_2) :: \dot{\mathbf{E}}(t_1) \dot{\mathbf{E}}(t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (29)$$

где тензорная функция  $\mathbf{C}(t)$  имеет такой же вид, как и в рамках обобщённой модели Максвелла (22), а функция  $\mathbf{N}(t_1, t_2)$  принимает форму

$$\mathbf{N}(t_1, t_2) = \sum_{su} \mathbf{N}_{su} e^{-\frac{t_1}{\tau_s}} e^{-\frac{t_2}{\tau_u}} + \sum_{su} \mathbf{N}_{suv} \mathcal{E}_{suv}(t_1, t_2), \quad (30)$$



$$\mathbf{N}_{suv} = \tau_s \mathbf{C}_s : \mathbf{B}_{suv}, \quad (31)$$

$$\mathcal{E}_{suv}(t_1, t_2) = e^{-\frac{t_1}{\tau_u}} e^{-\frac{t_2}{\tau_v}} \frac{T_{suv}}{\tau_s} \left( 1 - e^{-\frac{\min(t_1, t_2)}{T_{suv}}} \right), \quad (32)$$

при этом тензоры должны обладать следующими симметриями:

$$(N_{su})_{ijklmn} = (N_{us})_{ijmnlk}, \quad (33)$$

$$(N_{suv})_{ijklmn} = (N_{svu})_{ijmnlk}. \quad (34)$$

Выражение (29) представляет собой многоинтегральный подход к моделированию нелинейной вязкоупругости и является наиболее общим в отличие от широко применяемых одноинтегральных подходов [24]. Известно, что в изотропном теле линейный вязкоупругий тензор  $\mathbf{C}(t)$  имеет лишь две независимых функции — два динамических модуля Ламе  $\lambda(t)$  и  $\mu(t)$ , а нелинейный тензор  $\mathbf{N}(t_1, t_2)$  — четыре [25]. В качестве четырёх нелинейных динамических модулей в данной работе выбраны четыре функции  $l(t_1, t_2)$ ,  $m(t_1, t_2)$ ,  $n(t_1, t_2)$  и  $h(t_1, t_2)$  так, чтобы они естественным образом обобщали упругий материал Мурнагана, характеризуемый тремя постоянными  $l$ ,  $m$  и  $n$ . При этом модуль  $h(t_1, t_2)$  отличен от нуля только при вязкоупругих деформациях, а в пределе квазистатической упругой деформации, а также в пределе мгновенной деформации должен обращаться в ноль:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t, t - \tau) = 0, \quad \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0 \\ t_2 \rightarrow 0}} h(t_1, t_2) = 0, \quad (35)$$

где  $\tau$  — произвольная постоянная.

В рамках новой модели получены временные и частотные зависимости динамических модулей упругости. Наибольший интерес особенно для практических применений представляют именно частотные зависимости, приведённые ниже. Зависимости для линейных модулей Ламе совпадают с теми, что известны из линейной теории (обобщённой модели Максвелла):

$$\lambda(\omega) = - \sum_s \frac{i\omega\tau_s\lambda_s}{1 - i\omega\tau_s}, \quad \mu(\omega) = - \sum_s \frac{i\omega\tau_s\mu_s}{1 - i\omega\tau_s}. \quad (36)$$

а формулы для нелинейных модулей получены впервые:

$$l(\omega_1, \omega_2) = \sum_{su} l_{su} \mathcal{E}_{su}(\omega_1, \omega_2) + \sum_{suv} l_{suv} \mathcal{E}_{suv}(\omega_1, \omega_2), \quad (37a)$$

$$m(\omega_1, \omega_2) = \sum_{su} m_{su} \mathcal{E}_{su}(\omega_1, \omega_2) + \sum_{suv} m_{suv} \mathcal{E}_{suv}(\omega_1, \omega_2), \quad (37b)$$

$$n(\omega_1, \omega_2) = \sum_{su} n_{su} \mathcal{E}_{su}(\omega_1, \omega_2) + \sum_{suv} n_{suv} \mathcal{E}_{suv}(\omega_1, \omega_2), \quad (37c)$$

$$h(\omega_1, \omega_2) = \sum_{su} h_{su} \mathcal{E}_{su}(\omega_1, \omega_2) + \sum_{suv} h_{suv} \mathcal{E}_{suv}(\omega_1, \omega_2), \quad (37d)$$

где используются следующие обозначения:

$$\mathcal{E}_{su}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{\omega_1 \omega_2 \tau_s \tau_u}{(1 - i\omega_1 \tau_s)(1 - i\omega_2 \tau_u)}, \quad (38a)$$

$$\mathcal{E}_{suv}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{\tau_u \tau_v \omega_1 \omega_2}{(1 - i\omega_1 \tau_u)(1 - i\omega_2 \tau_v)(1 - i(\omega_1 + \omega_2) \tau_s)}. \quad (38b)$$

В разделе 3.4 показано, что выведенная модель позволяет объяснить частотную зависимость эффективных модулей Мурнагана, наблюдающуюся в экспериментах по акустоупругому эффекту (рис. 12). Акустоупругий эффект заключается в зависимости фазовой скорости волн деформации от величины статической силы, сдавливающей материал. В абсолютно упругом теле он позволяет экспериментально измерить упругие модули Мурнагана, однако в вязкоупругом теле возможности по определению динамических модулей с помощью этого эффекта принципиально ограничены. Поскольку этот эффект не позволяет определить все свободные параметры модели, то было сделано предположение о малости четвёртого модуля  $h(t_1, t_2)$  (который должен обращаться в ноль в упругом пределе) по сравнению с другими динамическими модулями Мурнагана и малости затухания волн. В таком случае эффективные модули, наблюдаемые в экспериментах, приблизительно равны  $l_{\text{eff}}(\omega) \approx l(\omega, 0)$ ,  $m_{\text{eff}}(\omega) \approx m(\omega, 0)$  и  $n_{\text{eff}}(\omega) \approx n(\omega, 0)$ . Данная модель предсказывает существенное увеличение абсолютного значения модулей Мурнагана в низкочастотной области, что является интересным результатом в свете возможного существования солитонов деформации. Следует отметить, что полученная модель при введённых предположениях не вполне хорошо описывает данные между 1.5 и 2 МГц, однако для более точного исследования применимости модели необходимы более подробные данные в большем диапазоне

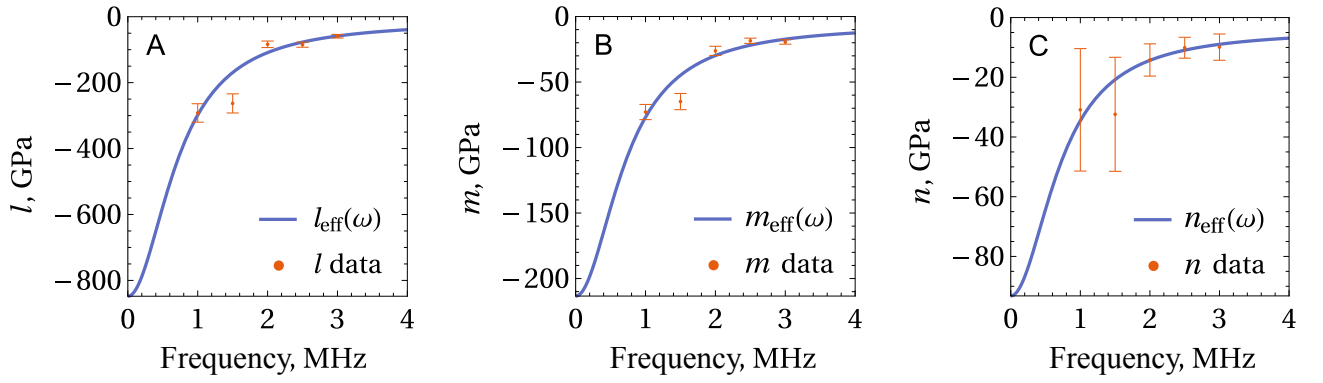


Рис. 12: Подгонка частотно-зависимых модулей с одним релаксационным процессом (синие линии) к экспериментальным данным (красные точки с планками погрешностей) для полистирола  $\text{PS}_{\text{lab2}}$  из работы [12].

частот.

Возникновение акустоупругого эффекта можно понимать как результат нелинейного взаимодействия двух волн, одна из которых имеет нулевую частоту. Очевидно, что в этом случае невозможно определить полностью динамические модули, являющиеся функциями двух частот. Полное проявление всевозможных эффектов в рамках полученной модели возможно при взаимодействии двух волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и волновыми векторами  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$ . Результатом этого взаимодействия является генерация новых гармоник.

В разделе 3.5 разделе показано, что амплитуда генерируемой высшей гармоники на суммарной частоте  $\omega_1 + \omega_2$  предоставляет достаточно информации для определения всех динамических модулей Мурнагана. В таблице 1 приведены четыре наиболее простых варианта взаимодействия двух волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , волновыми векторами  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$  и амплитудами  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ , достаточных при этом для полного определения всех четырёх модулей Мурнагана. Во всех перечисленных в таблице случаях результирующая волна имеет одну поляризацию — продольную или поперечную, но не смешанную, а амплитуда результирующей волны  $\vec{A}_3$  выражается следующим образом:

$$\vec{A}_3 = -\frac{ik_1k_2(k_1 + k_2)A_1A_2}{(k_3^2 D - \rho\omega_3^2)}\vec{a}_F, \quad (39)$$

где вектор  $\vec{a}_F$  и константа  $D$  указаны в самой таблице 1, а скалярные переменные  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $A_1$  и  $A_2$  обозначают длины соответствующих векторов. Как видно из таблицы, динамические модули  $l$ ,  $m$  и  $h$  можно определить рас-

| No. | $\vec{k}_1$ | $\vec{A}_1$ | $\vec{k}_2$ | $\vec{A}_2$ | $\vec{a}_F$  | $D$                                  |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|--|--------------------------------------|
| 1   | $x$         | $x$         | $x$         | $x$         | $\vec{e}_x [2h(\omega_1, \omega_2) + 2h(\omega_2, \omega_1) + 2l(\omega_1, \omega_2) + 4m(\omega_1, \omega_2) + \lambda(\omega_1) + \lambda(\omega_2) + \lambda(\omega_3) + 2\mu(\omega_1) + 2\mu(\omega_2) + 2\mu(\omega_3)]$ | $\lambda(\omega_3) + 2\mu(\omega_3)$ |
| 2   | $x$         | $x$         | $x$         | $y$         | $\vec{e}_y [h(\omega_1, \omega_2) + m(\omega_1, \omega_2) + \lambda(\omega_1) + 2\mu(\omega_1)]$   | $\mu(\omega_3)$                      |
| 3   | $x$         | $y$         | $x$         | $y$         | $\vec{e}_x [m(\omega_1, \omega_2) + \lambda(\omega_3) + 2\mu(\omega_3)]$   | $\lambda(\omega_3) + 2\mu(\omega_3)$ |
| 4   | $x$         | $y$         | $y$         | $z$         | $\vec{e}_z \frac{k_1}{k_1 + k_2} \left[ \frac{n(\omega_1, \omega_2)}{4} + \mu(\omega_1) \right]$   | $\mu(\omega_3)$                      |

Таблица 1: Генерация гармоника на сумме частот  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  двух волн. В столбцах  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{A}_1$ ,  $\vec{k}_2$  и  $\vec{A}_2$  указано направление этих векторов, например,  $x$  в столбце  $\vec{k}_1$  означает, что  $\vec{k}_1 = k_1 \vec{e}_x$ , где  $\vec{e}_x$  — единичный вектор оси  $x$ . Уравнение (39) следует использовать для получения амплитуды генерируемой гармоника.

смотрим случаи № 1 – 3, в которых и начальные волны и высшая гармоника распространяются вдоль одной оси ( $x$ ). Для получения модуля  $n$  необходимо использовать более сложный метод (№ 4), в рамках которого высшая гармоника генерируется двумя перпендикулярно распространяющимися волнами.

**Глава 4** посвящена численному методу, позволяющему эффективно моделировать трёхмерные уравнения нелинейной теории вязкоупругости. Существует множество способов дискретизации уравнений в частных производных для нахождения приближённого решения. Наибольшую сложность представляет пространственная дискретизация с учётом накладываемых граничных условий. Для областей с простой геометрией мощным средством являются спектральные методы, обладающие спектральной (быстрее любого полинома) скоростью сходимости по количеству точек сетки. Поскольку в данной работе геометрия тел достаточно проста (цилиндрический или прямоугольный стержень) и может быть представлена в виде прямого произведения отрезков, то выбор пал именно на семейство спектральных методов. Для пространственной дискретизации был применён метод Галёркина с численным интегрированием [26]. В рамках этого метода задача формулируется в слабой (инте-

гральной) постановке, а для вычисления интегралов применяется квадратура наивысшего порядка точности. Для учёта граничных условий использовалась квадратура Лежандра–Гаусса–Лобатто, включающая граничные точки. Применение такого метода удобно тем, что нахождение приближённого решения сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений во временной области относительно значений искомой функции (перемещения  $\vec{U}$  в уравнении (3)) в узлах квадратуры (точках коллокации).

При решении практических задач часто необходимо получать решение в высоком разрешении, т.е. иметь достаточно мелкую сетку, позволяющую аккуратно приближать быстро меняющиеся функции. Мелкая сетка, в частности, позволяет точнее моделировать короткие волны деформации. Использование слишком большого количества точек в спектральном методе может сделать его применение чрезмерно затратным с вычислительной точки зрения. Для баланса между разрешением сетки и скоростью работы применяют многодоменные методы, в рамках которых область решения разбивается на несколько доменов, в каждом из которых дискретизация задачи проводится согласно спектральному методу (рис. 13).

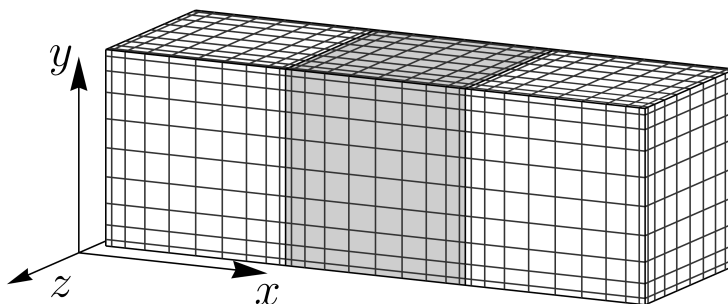


Рис. 13: Трёхмерная сетка из трёх доменов, образованная точками коллокации Лежандра–Гаусса–Лобатто в каждом из доменов. Разные домены выделены цветом.

В данной главе показано, что за счёт баланса между количеством точек сетки (степенью полинома, аппроксимирующего значения функций) в каждом домене и количеством доменов можно оптимизировать скорость вычислений при одной и той же погрешности решения. Для этого было проведено три серии расчётов на сетках с разным числом доменов и разным количеством точек в каждом домене. В качестве тестовой задачи для расчётов выбрано

моделирование удара по торцу прямоугольного стержня, описанное в разделе 3.2. В первой серии расчётов область была разбита на 4 домена вдоль оси  $x$ , а вдоль осей  $y$  и  $z$  разбиение не проводилось. В каждом домене было выбрано одинаковое количество точек  $N$  вдоль каждой оси, а расчёты проводились для  $N = 6, 12, 18, 24, 30$  и  $36$ . Во второй и третьей серии расчётов количество доменов вдоль каждой оси было увеличено в два и в три раза соответственно, а число точек в одном домене вдоль каждой оси пропорционально уменьшено, так чтобы общее количество точек сетки оставалась неизменной. Схемы таких сеток приведены в легенде рисунка 14.

На рисунке 14а построена зависимость относительной погрешности решения от общего количества точек сетки, демонстрирующая характерное для спектральных методов экспоненциальное убывание ошибки с ростом количества точек сетки. Быстрое убывание ошибки сопряжено с быстрым ростом времени вычислений, что продемонстрировано на рис. 14b. Зависимость ошибки от времени вычисления показана на рис. 14с.

Разная скорость убывания ошибки и роста времени вычислений позволяет оптимизировать время для желаемого уровня погрешности. Так, при ошибке  $2 \cdot 10^{-3}$  (верхняя пунктирная линия на рис. 14с) оптимальным по времени оказывается разбиение на 8 доменов вдоль оси  $x$  и на 2 домена вдоль каждой из осей  $y$  и  $z$ , при этом число точек вдоль каждой оси в одном домене  $N = 12$ . При повышении требуемой точности до  $2.8 \cdot 10^{-4}$  (нижняя пунктирная линия на рис. 14с) разбиение на 12 доменов по  $x$  и на 3 домена по  $y$  и  $z$  ( $N = 12$  в каждом домене) начинает быть более эффективным.

Представленный в данной главе численный метод активно применялся для проверки асимптотических теорий, описанных в главе 2, и для моделирования зарождения солитона деформации в главе 3.

**В заключении** подытожены основные результаты работы:

1. Проведён систематический асимптотический анализ уравнений нелинейной теории упругости (уравнений баланса импульса и граничных условий) в приближении длинных продольных волн и малых деформаций в упругом стержне круглого сечения. В результате получено скорректированное уравнение типа Буссинеска, обладающее наилучшими дисперсионными свойствами среди известных из литературы уравнений того же типа. Показано, что даль-

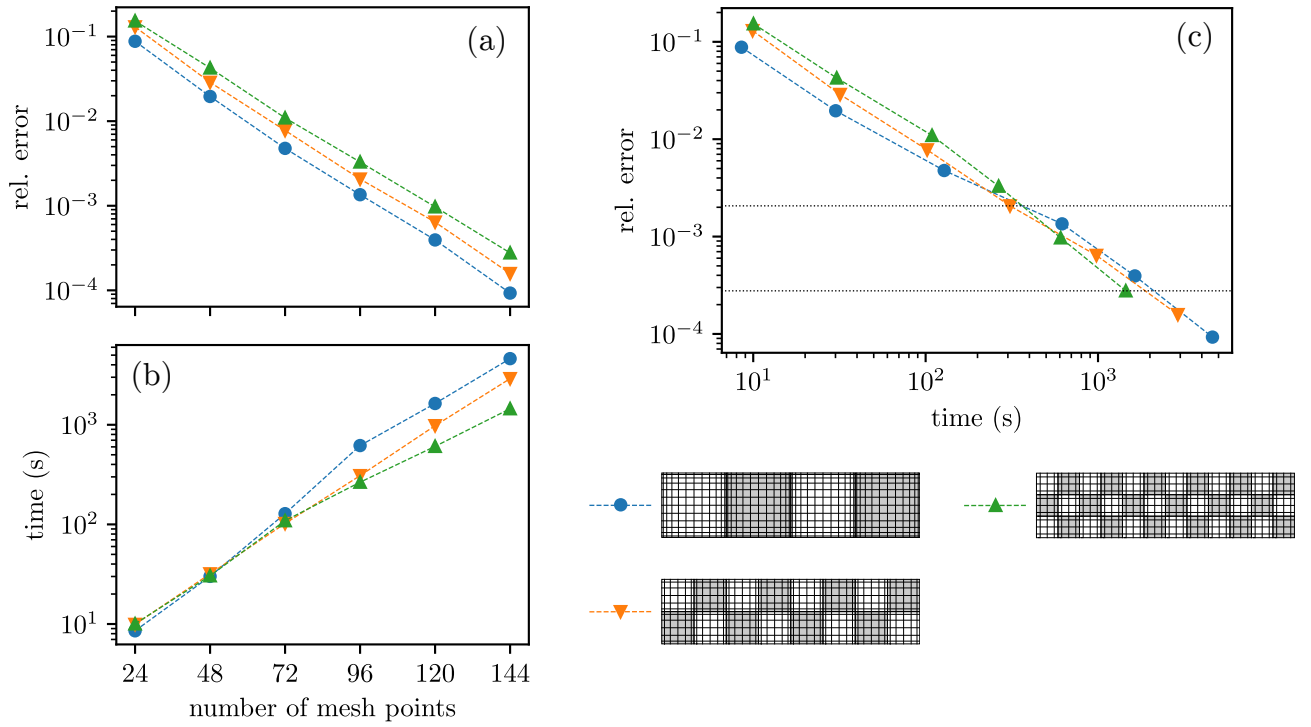


Рис. 14: Зависимость относительной погрешности решения (панель а) и времени вычисления (панель б) от общего количества точек сетки; зависимость относительной погрешности от времени вычисления (панель с). Легенда: синие линии, круглые точки — 4 домена по оси  $x$  и 1 домен по осям  $y$  и  $z$  ( $4 \times 1 \times 1$ ); оранжевые линии, перевёрнутый треугольник — в два раза больше доменов по каждой из осей ( $8 \times 2 \times 2$ ); зелёные линии, треугольный маркер — в три раза больше доменов по каждой из осей ( $12 \times 3 \times 3$ ). У сеток с большим числом доменов количество точек в каждом домене пропорционально уменьшено.

нейший асимптотический анализ позволяет свести его к известному уравнению Кортевега–де Фриза.

2. С увеличением амплитуды приобретают значимость эффекты следующего порядка малости, учитываемые в расширенном уравнении КдФ. При этом показано, что, если модули упругости третьего и четвёртого порядков существенно превышают модуль Юнга (что типично для многих материалов), то ключевые свойства солитонов описываются уравнением Гарднера. Как следствие, в зависимости от соотношения между модулями упругости солитоны деформации в режиме средних амплитуд могут приобретать вид либо узких, либо широких солитонов, также известных как флатоны. Справедливость асимптотических моделей подтверждается результатами расчётов полных трёхмерных уравнений.

3. С помощью гипотезы плоских и равномерно деформируемых сечений получена одномерная модель, не являющаяся асимптотической, но применимая для качественного моделирования как длинных, так и коротких продольных волн в стержнях с произвольной формой поперечного сечения.

4. На основе многодоменного псевдоспектрального метода представлен численный метод, позволяющий эффективно моделировать полные трёхмерные уравнения движения упругих и вязкоупругих тел со сложной нелинейной и запаздывающей связью напряжения с деформацией.

5. Проведено моделирование зарождения длинной солитоноподобной волны в нелинейно-упругом и линейно-вязком стержне. Установлено, что быстрое формирование длинной волны в результате приложения короткого давления к торцу стержня, наблюдавшееся в экспериментах, происходит благодаря линейным эффектам: дисперсии и вязкоупругой диссипации, а нелинейные эффекты должны проявляться на существенно более поздних этапах эволюции волны.

6. Построена модель полностью нелинейного вязкоупругого материала, естественным образом обобщающая, с одной стороны, нелинейное абсолютно упругое тело на случай вязкой упругости, а с другой — обобщённую модель Максвелла линейного вязкоупругого тела на нелинейный случай. В рамках этой модели впервые получен вид частотных зависимостей изотропных модулей упругости третьего порядка (модулей Мурнагана). Предложенная модель позволяет объяснить сильную частотную зависимость акустоупругого эффекта, наблюдавшуюся экспериментально.

7. В общем случае упругие модули третьего порядка зависят от двух переменных частоты, поэтому их частотная зависимость наиболее полным образом проявляется при нелинейном взаимодействии двух волн на разных частотах. Показано, что амплитуда генерируемой высшей гармоники на суммарной частоте предоставляет достаточно информации для полного измерения частотно-зависимых упругих модулей третьего порядка.



## Список публикаций

- [A1] Гарбузов Ф. Е. [Определение упругих модулей 3-го порядка по параметрам объемных солитонов деформации](#) / Гарбузов Ф. Е., Самсонов А. М., Семенов А. А., Шварц А. Г. // Письма в ЖТФ. — 2016. — Т. 42, №3 — С. 16–22.
- [A2] Samsonov A. M. [Nonlinear guided bulk waves in heterogeneous elastic structural elements](#) / Samsonov A. M., Semenova I. V., Garbuzov F. E. // Int. J. Non-Linear Mech. — 2017. — Vol. 94. — P. 343–350.
- [A3] Garbuzov F. E. [On Boussinesq-type models for long longitudinal waves in elastic rods](#) / Garbuzov F. E., Khusnutdinova K. R., and Semenova I. V. // Wave Motion. — 2019. — Vol. 88. — P. 129–143.
- [A4] Гарбузов Ф. Е. [Продольные объемные солитоны деформации в гиперупругом стержне с квадратичной и кубической нелинейностями](#) / Гарбузов Ф. Е., Бельтюков Я. М., Хуснутдинова К. Р. // ТМФ — 2020. — Т. 202, №3 — С. 364–381.
- [A5] [Formation of long strain waves in viscoelastic bar subjected to a longitudinal pulse load](#) / Garbuzov F. E., Semenova I. V., Belashov A. V., and Beltukov Y. M. // 2021 Days on Diffraction (DD). — 2021. — P. 58–62.
- [A6] [Shock wave evolution into strain solitary wave in nonlinearly elastic solid bar](#) / Garbuzov F. E., Belashov A. V., Zhikhoreva A. A., Beltukov Y. M., and Semenova I. V. // Wave Motion. — 2022. — Vol. 114. — P. 103022.
- [A7] Garbuzov F. E. [Viscoelastic relaxation of nonlinear strain waves in polymeric bars.](#) / Garbuzov F. E. and Beltukov Y. M. // AIP Conf. Proc. — 2023. — Vol. 2849. — P. 450024.
- [A8] Garbuzov F. E. [Generalization of nonlinear Murnaghan elastic model for viscoelastic materials](#) / Garbuzov F. E. and Beltukov Y. M. // Int. J. Non-Linear Mech. — 2024. — Vol. 159. — P. 104598.

Все работы опубликованы в изданиях, индексируемых Scopus. Публикации A1 – A4, A6 и A8 входят в Web of Science Core Collection.

## Список литературы

- [1] Lissenden C. J. [Nonlinear ultrasonic guided waves — Principles for non-destructive evaluation](#) // J. Appl. Phys. — 2021. — Vol. 129, no. 2. — P. 021101.
- [2] Maev R. G. [Applications of non-linear acoustics for quality control and material characterization](#) / Maev R. G. and Seviaryn F. // J. Appl. Phys. — 2022. — Vol. 132, no. 16. — P. 161101.
- [3] van Capel P. J. S. [Nonlinear ultrafast acoustics at the nano scale](#) / van Capel P. J. S., Péronne E., and Dijkhuis J. I. // Ultrasonics. — 2015. — Vol. 56. — P. 36–51.
- [4] [Acoustic solitons: A robust tool to investigate the generation and detection of ultrafast acoustic waves](#) / Péronne E., Chuecos N., Thevenard L., and Perrin B. // Phys. Rev. B. — 2017. — Vol. 95. — P. 064306.
- [5] Samsonov A. M. [Strain solitons in solids and how to construct them.](#) — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [6] Porubov A. V. [Amplification of nonlinear strain waves in solids.](#) — Singapore: World Scientific, 2003.
- [7] Khusnutdinova K. R. [Fission of a longitudinal strain solitary wave in a delaminated bar](#) / Khusnutdinova K. R. and Samsonov A. M. // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 77, no. 6. — P. 1–11.
- [8] [Detecting delamination via nonlinear wave scattering in a bonded elastic bar](#) / Tamber J. S., Chappell D. J., Poore J. C., and Tranter M. R. // Nonlinear Dyn. — 2023. — Vol. 112. — P. 23–33.
- [9] Destrade M. [Proper formulation of viscous dissipation for nonlinear waves in solids](#) / Destrade M., Saccomandi G., and Vianello M. // J. Acoust. Soc. Am. — 2013. — Vol. 133, no. 3. — P. 1255–1259.

- [10] De Pascalis R. [Kink-type solitary waves within the quasi-linear viscoelastic model](#) / De Pascalis R., Napoli G., and Saccomandi G. // *Wave Motion*. — 2019. — Vol. 86. — P. 195–202.
- [11] Favrie N. [A hyperbolic generalized Zener model for nonlinear viscoelastic waves](#) / Favrie N. and Lombard B. // *Wave Motion*. — 2023. — Vol. 116. — P. 103086.
- [12] [Third-order elastic moduli of polystyrene samples fabricated by different technologies](#) / Belashov A. V., Zhikhoreva A. A., Beltukov Y. M., Moskalyuk O. A., and Semenova I. V. // *Tech. Phys.* — 2021. — Vol. 66, no. 8. — P. 1186–1192.
- [13] Murnaghan F. D. *Finite deformation of an elastic solid*. — New York: John Wiley & Sons, 1951.
- [14] Ostrovskii L. A. [Nonlinear elastic waves in rods](#) / Ostrovskii L. A. and Sutin A. M. // *J. Appl. Math. Mech.* — 1977. — Vol. 41. — P. 543–549.
- [15] Boström A. [On wave equations for elastic rods](#) // *Z. Angew. Math. Mech.* — 2000. — Vol. 80. — P. 245–251.
- [16] Hiki Y. [Higher order elastic constants of solids](#) // *Ann. Rev. Mater. Sci.* — 1981. — Vol. 11, no. 1. — P. 51–73.
- [17] Semenov A. [Nonlinear elastic moduli of composite materials with nonlinear spherical inclusions dispersed in a nonlinear matrix](#) / Semenov A. and Beltukov Y. // *Int. J. Solids Struct.* — 2020. — Vol. 191-192. — P. 333–340.
- [18] [Relative variations of nonlinear elastic moduli in polystyrene-based nanocomposites](#) / Belashov A. V., Beltukov Y. M., Moskalyuk O. A., and Semenova I. V. // *Polymer Testing*. — 2021. — Vol. 95. — P. 107132.
- [19] Fokas A. S. [Asymptotic integrability of water waves](#) / Fokas A. S. and Liu Q. M. // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 77, no. 12. — P. 2347.
- [20] Hughes D. S. [Second-order elastic deformation of solids](#) / Hughes D. S. and Kelly J. L. // *Phys. Rev.* — 1953. — Vol. 92. — P. 1145–1149.

- [21] Porubov A. V. [Longitudinal strain solitary waves in presence of cubic non-linearity](#) / Porubov A. V. and Maugin G. A. // *Int. J. Non-Linear Mech.* — 2005. — Vol. 40, no. 7. — P. 1041–1048.
- [22] Maugin G. A. [Thermodynamics with internal variables. Part I. General concepts](#) / Maugin G. A. and Muschik W. // *J. Non-Equilib. Thermodyn.* — 1994. — Vol. 19. — P. 217–249.
- [23] Truesdell C. [The non-linear field theories of mechanics](#) / Truesdell C. and Noll W. // *The non-linear field theories of mechanics* / ed. by Antman S. S. — Berlin: Springer, 2004.
- [24] Wineman A. [Nonlinear viscoelastic solids – a review](#) // *Math. Mech. Solids.* — 2009. — Vol. 14, no. 3. — P. 300–366.
- [25] Findley W. N. *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials: with an introduction to linear viscoelasticity* / Findley W. N., Lai J. S., and Onaran K. — Dover, 1989.
- [26] *Spectral methods: fundamentals in single domains* / Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., and Zang T. A. — Springer, 2007.