

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А.Ф. ИОФФЕ  
Российской академии наук

*на правах рукописи*

**Донцов Антон Александрович**

СПЕКТР И ДИНАМИКА  
ЛАЗЕРОВ НА МОДАХ ШЕПЧУЩЕЙ  
ГАЛЕРЕИ И КОЛЬЦЕВЫХ ЛАЗЕРОВ

**Специальность:**

01.04.10 - физика полупроводников

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**научный руководитель:**  
доктор физико-математических наук,  
профессор Н. С. Аверкиев

Санкт-Петербург  
2017

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Влияние дефектов стенок резонатора на моды шепчущей галереи</b>	<b>12</b>
1.1 Введение . . . . .	12
1.2 Постановка задачи о дефекте полудискового резонатора . . . . .	19
1.3 Решение задачи о полудисковом резонаторе . . . . .	21
1.4 Постановка задачи о дефекте дискового резонатора . . . . .	24
1.5 Решение задачи о дефекте дискового резонатора . . . . .	25
1.6 Заключение . . . . .	28
<b>2 Фотолюминесценция микросфер с тонким покрытием из люминофора на модах шепчущей галереи</b>	<b>29</b>
2.1 Введение . . . . .	29
2.2 Изучаемый эксперимент и его методика . . . . .	31
2.3 Теория наблюдаемого эффекта . . . . .	33
2.4 Заключение . . . . .	40
<b>3 Использование зонда сканирующей силовой микроскопии для исследования излучения полудискового лазера на модах шепчущей галереи</b>	<b>42</b>
3.1 Введение . . . . .	42
3.2 Изучаемый эксперимент и его методика . . . . .	49
3.3 Теория наблюдаемого эффекта . . . . .	52
3.4 Формула для оценки чувствительности зондов и оптические расчеты . . . . .	55
3.5 Заключение . . . . .	58

<b>4 Эффект переключения встречных мод в кольцевом лазере, вызванный внешней оптической перекрестной обратной связью с задержкой</b> .....	<b>58</b>
4.1 Введение . . . . .	58
4.2 Уравнения для кольцевых лазеров с перекрестной внешней оптической обратной связью с задержкой . . . . .	70
4.3 Численное изучение вынужденного эффекта переключения мод	73
4.4 Аналитическая формула для критической силы внешней обратной связи . . . . .	74
4.5 Заключение . . . . .	76
<b>Приложение А Получение аналитической формулы для величины задержанной обратной связи, достаточной для потери однонаправленным решением своей стабильности</b> .....	<b>79</b>
<b>Приложение В Метод нахождения критических чисел для квазиполиномов</b> .....	<b>83</b>
<b>Список литературы</b>	<b>86</b>

## Введение

Актуальность темы исследования В акустике известен следующий интересный эффект: в помещениях круглой формы звук может распространяться в тонком слое вдоль стены, не проникая в центр помещения и почти не рассеиваясь. Если встать у стены на расстоянии не намного большем, чем длина волны звука ( $\sim 0.5$  м) и тихо говорить, то человек, стоящий у стены даже в другом конце помещения, услышит вас, а люди вдали от стены - нет.

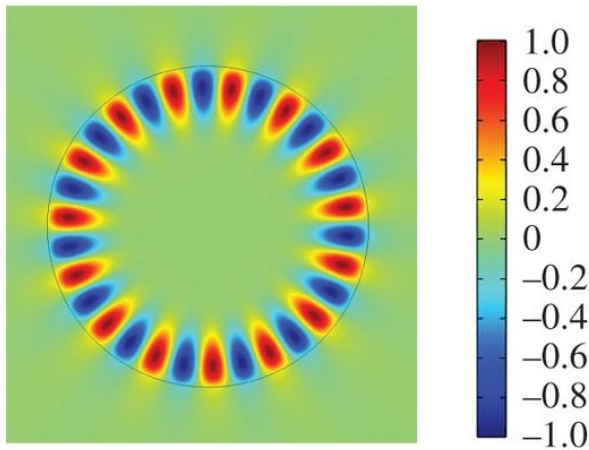


Рисунок 1 – Пример моды шепчущей галереи в диске. На рисунке изображена составляющая вектора электрического поля в определенный момент времени. Радиус диска много больше, чем длина волны. Показана мода первого радиального порядка (один экстремум поля по радиусу) и 15-го углового порядка (30 экстремумов поля по углу).

Рис. 1.

Несмотря на то, что создание теории МШГ в свое время повлияло на развитие всей электродинамики [7], исследований на эту тему почти не бы-

Боле того, говорящий будет слышать эхо собственного голоса. Это явление объясняется существованием т.н. 'мод шепчущей галереи' (МШГ). Эти моды были теоретически описаны лордом Рэлеем в конце 19-го века [1], а экспериментально подробно изучались Раманом в 1921-м году в соборе Святого Павла в Лондоне [2].

Такое же явление наблюдается и в электродинамике. Электродинамические моды шепчущей галереи унаследовали свое название из акустики и существуют в резонаторах круглой формы таких как сферы [3], диски и цилиндры [4], тороиды [5], резонаторы 'бутылочной' формы [6] и т.п. Пример распределения поля МШГ в диэлектрическом диске при-

ло. В качестве исключения можно привести исследование начала 60-х годов прошлого века, приведшее к пониманию того, что ионосфера Земли ведет себя по отношению к длинным радиоволнам как сферическая отражающая поверхность [8]. Другой пример - один из первых твердотельных лазеров на основе сферического резонатора [9].

Однако, настоящий интерес к электродинамическим МШГ появился лишь в 80-е, и с тех пор он только возрастает, причем как в радиоволновом [10], так и в оптическом диапазонах [11]. Этот интерес высок как в области полупроводниковых материалов [12, 13], так и диэлектрических [14, 15]. Оказалось, что МШГ обладают уникальными свойствами, которые делают их практически незаменимыми в самых современных исследованиях и устройствах. Сегодня применения МШГ резонаторов настолько разнообразны, что любой результат в этой области может оказаться чрезвычайно важным в практическом или теоретическом отношении [16–18].

Степень разработанности темы диссертации. Первое уникальное свойство МШГ резонаторов состоит в том, что они обладают совершенно феноменальной добротностью, как минимум на два порядка превосходящей добротность аналогичных резонаторов Фабри-Перо (ФП). Это связано с полным внутренним отражением лучей внутри МШГ резонатора. Так, в оптическом диапазоне, даже в простых микрокаплях на гидрофобных поверхностях, образующих сферические резонаторы, добротность достигает  $Q \sim 10^6$  [19], а в чистых кристаллических микросферах можно добиться величин  $Q \sim 10^{10}$  [20]. Это позволяет использовать подобные резонаторы в узкополосных спектральных фильтрах [21, 22], в сверхстабильных генераторах чистого сигнала [23], для измерений затухания в очень чистых материалах [24]. Становится возможным наблюдение рамановского индуцированного рассеяния [19, 25], получение эффективных лазеров [26]...

Добротность в оптическом диапазоне, чаще всего, определяется рассеянием на поверхностных и внутренних неоднородностях резонатора. Для неоднородностей, обладающих малыми размерами, рэлеевское рассеяние было хорошо изучено еще в связи с нуждами волоконной оптики. При бо-

лее грубых технологиях массового производства поверхностные дефекты реальных резонаторов могут иметь масштабы, сравнимые и, даже большие длины волны, однако, хоть сколько-нибудь полный анализ этой проблемы на сегодняшний день не проведен [18].

Второе уникальное свойство МШГ заключается в их чрезвычайно малом модовом объеме. Тот факт, что поле сосредоточено в узком слое у границы резонатора означает увеличение интенсивности излучения при прочих равных условиях, т.е. высокую концентрацию фотонов. Высокая удельная интенсивность прекрасно подходит для самых разнообразных экспериментов по нелинейной оптике и квантовой электродинамике [16, 17].

Высокая интенсивность также означает большое оптическое давление на стенки резонатора и, следовательно, высокую степень оптомеханической связи [27], изучаемую сравнительно новой областью на стыке наук - оптомеханикой [28, 29]. Одним из интересных эффектов в этой области является самопроизвольная перекачка энергии из механических колебаний в оптическое поле - так называемое 'оптическое охлаждение'. Этот эффект позволяет охладить микрообъект до основного квантового состояния [30, 31].

Кроме того, высокая интенсивность у поверхности резонатора делает моду очень чувствительной к любым дефектам этой поверхности, в частности, если на микросферу оседает частица инородного вещества, это сильно отразится на спектре. Последнее явление позволяет использовать МШГ резонаторы в качестве детекторов химических и биологических единичных частиц [32, 33]. По той же самой причине и любые регулярные структуры, покрывающие МШГ резонатор, будут оказывать большое влияние на спектр и поля мод. Простым примером является пленка, но в зависимости от форм и характеристик поверхностных структур появляются новые неисследованные возможности.

Еще одним важным свойством МШГ, помимо двух указанных выше, является двойное вырождение по частоте. Это - важная концепция, которую следует пояснить подробно. В одномерном ФП резонаторе из двух параллельных зеркал одной частоте и одному направлению поляризации соответствует одна мода. Если взять три зеркала и разместить их в вершинах

равностороннего треугольника, то мы получим лазер т.н. кольцевого типа. Главная особенность таких лазеров в том, что одной частоте соответствуют две встречные моды: одна распространяется по часовой стрелке, другая против. Эти моды в резонаторе совершенно независимы и их амплитуды могут быть произвольными. Геометрические распределения полей встречных мод совершенно одинаковы, так как при зеркальном отражении они переходят друг в друга.

Резонаторы на МШГ тоже относятся к кольцевому типу и вдоль их стенок так же могут распространяться две независимые встречные моды. Если МШГ резонатор заполнить активной средой, изготовив тем самым лазер, то две встречные моды будут сильно воздействовать друг на друга [34]. Нетривиальное даже в простом кольцевом лазере взаимодействие встречных мод становится гораздо богаче при различных модификациях резонатора, открывая новую динамику и неизученные варианты применений.

Подводя итог скажем, что, несмотря на хорошую степень исследованности МШГ резонаторов идеальных форм и лазеров на их основе, при различных намеренных модификациях или же дефектах резонаторов, характеристики МШГ могут сильно меняться. Это приводит к огромному разнообразию как позитивных, так и негативных последствий, что открывает широкое поле для исследований и приложений.

Цель диссертационной работы состоит в теоретическом исследовании различных явлений в модифицированных МШГ резонаторах и лазерах на их основе.

Научная новизна работы заключается в теоретическом изучении следующих неизученных ранее вопросов:

1. Влияние дефектов поверхности на спектр и распределение полей МШГ в дисковом и полудисковом резонаторах.
2. Построение теории экспериментального спектра люминесценции кварцевой микросферы с тонкой пленкой люминофора на ней.
3. Установление механизма воздействия излучения на собственные ме-

ханические колебания зонда в эксперименте со сканированием полудискового МШГ лазера.

4. Изучение условий, при которых в кольцевом резонаторе с внешней перекрестной задержанной обратной связью возможно переключение встречных мод.

Практическая значимость работы. В первой главе проанализировано поведение МШГ в резонаторах при возникновении реальных крупномасштабных производственных дефектов, сделано заключение, что влияние достаточно сильно и выясняется характер этого влияния. Во второй главе устанавливается сильное влияние тонкой пленки на спектр люминесценции микросферы, отсюда можно заключить, что спектр излучения можно легко контролировать различными способами, (механическими, температурными и т.п.) меняя толщину нанесенной пленки. В третьей главе приводится схема детектирования излучения при помощи кантилевера, которая может оказаться более чувствительной по сравнению с аналогами. В четвертой главе приводится модификация резонатора, позволяющая получить переключения встречных мод со строго заданным периодом, это может быть использовано как в простом оптическом генераторе, так и в более сложных системах, таких как, например, гипотетический твердотельный лазерный гироскоп.

Методология и методы исследования. В работе использовались различные методы математической физики и численных расчетов.

В гл. 1 использовались различные вариации метода теории граничных возмущений, в том числе численные расчеты для проверки соответствующих результатов. Численные расчеты также применялись для установления распределения полей МШГ при разных величинах дефектов.

В гл. 2 применялись методы классической электродинамики для расчета спектра соответствующих сферических структур с поверхностной пленкой. Для решения возникающих характеристических уравнений использовались численные методы, а для установления конкретных значений параметров в пределах погрешности был применен оптимизационный алгоритм



Недлера-Мида.

В гл. 3 проводились оценочные расчеты для установления конкретного физического механизма явления. Проводились оптические расчеты как аналитического, так и численного типа для установления величины поглощенного излучения. Использовался тепловой расчет для вычисления температурного распределения и смещения частоты, вызванного им.

В гл. 4 применялась полуклассическая теория лазера класса В для получения модифицированной версии уравнений кольцевого лазера с учетом задержанной перекрестной обратной связи. Применялись методы численного моделирования уравнений с задержкой для изучения полученных уравнений. Кроме того использовалась теория устойчивости стационарных точек уравнений с отклоняющимся аргументом для получения формул критической силы связи.

Основные положения, выносимые на защиту:

1 Дефекты поверхности резонатора, малые по одному из своих размеров в сравнении с длиной волны, существенным образом влияют на спектры МШГ, а когда дефекты становятся сравнимы с длиной волны по всем своим размерам, МШГ перестает распространяться вдоль стенок.

2 Спектры люминесценции микросфер с тонкой пленкой люминофора на них представляют собой спектры мод шепчущей галереи в шаре с учетом тонкого слоя оптически инородного материала на его поверхности.

3 Механизм воздействия оптического излучения на собственную частоту колебаний микрокантилевера состоит в изменении модуля Юнга материала зонда из-за нагрева.

4 Введение даже слабой внешней перекрестной обратной связи с задержкой в кольцевой лазер может приводить к переключениям встречных мод с периодом, почти равным удвоенному времени задержки.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на трех семинарах в ФТИ им. Иоффе, на семинаре в Политехническом университете и семинаре в Санкт-Петербургском государственном университете, был сделан устный доклад на 3-м симпозиуме 'Полупроводниковые лазеры: физика и технология', стендовый доклад на XI российской конференции по физике полупроводников.

Публикации. По результатам работы опубликованы четыре печатные работы, список которых имеется в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из общего введения, четырех глав, двух приложений и списка литературы. Каждая глава имеет основную часть, а также свои собственные введение и заключение. Диссертация содержит 117 страниц, 15 рисунков и 4 таблицы. Список литературы содержит 296 наименований.

Первая глава 'Влияние дефектов стенок резонатора на моды шепчущей галереи' посвящена изучению влияния поверхностных дефектов резонатора на спектр и распределение полей МШГ.

Во второй главе 'Фотолюминесценция микросфер с тонким покрытием из люминофора на модах шепчущей галереи' теоретически исследуются экспериментальные спектры фотолюминесценции микросфер и устанавливается, что они образованы модами шепчущей галереи.

В третьей главе 'Использование зонда сканирующей силовой микроскопии для исследования излучения полудискового лазера на модах шепчущей галереи' изучается механизм воздействия излучения лазера на измеряющий зонд в соответствующих экспериментах.

Четвертая глава 'Эффект переключения встречных мод в кольцевом лазере, вызванный внешней оптической перекрестной обратной связью с задержкой' посвящена изучению влияния внешней оптической обратной связи с задержкой на динамику кольцевого лазера, частным случаем которого является лазер на модах шепчущей галереи. Особенно подробно изучается

режим переключений встречных мод.

В Приложениях А и В приведены громоздкие математические выкладки, посвящённые получению критической величины задержанной обратной связи, способной вызвать переключения из гл. 4.

# 1 ВЛИЯНИЕ ДЕФЕКТОВ СТЕНОК РЕЗОНАТОРА НА МОДЫ ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ

## 1.1 Введение

Как указывалось выше, МШГ очень чувствительны к разного рода дефектам поверхности, что позволяет использовать их в качестве детекторов частиц [32], в том числе и биологических [33, 35–37]. С другой стороны, на практике при изготовлении МШГ резонаторов часто возникают непредвиденные дефекты. Целью первой главы являлось теоретически выяснить степень влияния некоторых типов дефектов на МШГ в резонаторах дисковой и полудисковой форм.

При изготовлении дисковых и полудисковых резонаторов имеют место отклонения формы резонатора от идеальной. Так, при изготовлении полудискового лазера скол, как правило, не проходит точно через центр диска. На боковых поверхностях дисковых резонаторов возможно появление мелких сколов (рис. 2 а,б). Целью данной главы является изучение влияния небольших ( $\alpha \ll 1$ ) дефектов на модовую структуру соответствующего резонатора.

Здесь мы сделаем отступление и сразу представим довольно подробный обзор общей тематики МШГ, чтобы не распределять его по введениям остальных глав. Во введении диссертации мы уже обсудили природу и уникальные свойства МШГ, а так же кратко описали приложения. Теперь остановимся на более специфических деталях и приложениях.

Для начала интересно перечислить места, где можно наблюдать данное явление: Храм Гроба Господня в Иерусалиме; Собор Святого Петра в Ватикане; Арка влюблённых в Казане; Станция 'Маяковская' Московского метрополитена; Аудитория Военно-медицинской Академии, расположенная в куполе бывшей церкви Божией Матери 'Всех скорбящих радости' при бывшей Обуховской больнице Императрицы Екатерины II. Санкт-Петербург, район Витебского вокзала и т.п.

Как указано раньше, с научной точки зрения, явление МШГ было описано лордом Рэлеем в 1896-м году [1]. Именно он был первым кто понял, что стены отражают расходящуюся часть звукового пучка и постоянно рефокусируют его, формируя моду шепчущей галереи (МШГ). Точнее, в статье он описал не все конфигурации МШГ, а лишь моды с минимальным радиальным числом вариаций поля.

Тщательно экспериментально эффект изучался Раманом [2] в 1921-м году в соборе Святого Павла в Лондоне. Вот отрывок из этой статьи: '...теоретически была разработана лордом Рэлеем. Его выводы были таковы: а) Звуковые волны распространяются в относительно узком поясе, вблизи стены. Толщина этого пояса примерно равна длине волны. б) Интенсивность звука максимальна у стены и быстро убывает по радиальному направлению. в) Интенсивность практически одинакова на одном расстоянии от стены в любом месте окружности.' В статье [2] Раман обнаружил, что звук может меняться периодически по радиальному направлению к стене (это соответствует МШГ, более высоких радиальных порядков), а также вдоль стены. Последний эффект Раман совершенно правильно связал с интерференцией двух, бегущих навстречу друг другу волн МШГ.

Рассмотрение явлений взаимодействия звука с поверхностями сложной формы привело к созданию Густавом Ми теории рассеяния уже электромагнитных волн на металлических сферах [7]. В дальнейшем эта теория была упрощена и применена к рассеянию волн радара на каплях дождя и града. Дебай упростил математическую часть теории и применил её к распространению света вдоль диэлектрических проводов, создав, таким образом, теорию оптического световода. В дальнейшем эти эффекты активно изучались, например, была создана теория световода, замкнутого в кольцо, образующего резонатор [38].

После 60-х годов исследований в области МШГ практически не было, но интерес к ним вновь появился в 80-х в связи с двумя основными направлениями: Оптические свойства микрорезонаторов, полученных капельным методом [11] и микроволновые свойства гладких диэлектрических резонаторов с высокой диэлектрической проницаемостью [10]. Хотя принципиаль-

ных различий между микроволновыми и оптическими резонаторами нет, практические различия существенны из-за различных способов возбуждения соответствующих мод и разного характера затухания излучения.

В микроволновом спектре были исследованы самые разные формы резонаторов: сферические [3, 39], цилиндрические [4, 40, 41] и даже еще более сложные формы [42]. Потери в микроволновом резонаторе, как правило, растут с ростом частоты [43]. Таким образом, произведение  $Q \cdot f \sim const$  оказывается примерно постоянным. Из-за этого при больших микроволновых частотах трудно добиться большой добротности. Так при  $f = 9 GHz$  максимально достигнутая добротность составляет  $Q \sim 10^5$  [44].

Среди всех типов резонаторов из данного материала, в данной спектральной области МШГ имеют наибольшую добротность, что дает возможность использовать их в качестве эффективных спектральных фильтров [21]. Так же их используют в качестве хранилища энергии в ультрастабильных микроволновых генераторах чистого сигнала [23, 45, 46]. Такие генераторы применяют в различных точных экспериментах, например, связанных с проверкой теории относительности [47].

Другим важным применением подобных структур является измерение слабого затухания в очень прозрачных материалах [24, 48] и в материалах с низкой диэлектрической проницаемостью [49]. По указанным ниже причинам, даже в микроволновой области МШГ резонаторы хорошо подходят для наблюдения различных нелинейных эффектов [50].

Поле, существующее в подобных резонаторах, может иметь длину волны более миллиметра, что означает, что становится возможно использовать металлическую антенну для возбуждения подобных мод [23]. Для меньших длин волн радиодиапазона и THz диапазона [51] уже необходимо использовать диэлектрические [52] или металлические волноводы. Моды низкого порядка хорошо связаны с излучательными модами свободного пространства, т.е. в этом смысле те же самые диэлектрические структуры могут быть использованы в качестве антенн [53].

Теперь перейдем к рассмотрению оптических резонаторов. Их важной особенностью является высокая степень гладкости поверхности по срав-

нению с микроволновыми резонаторами. Один из методов создания такой поверхности основан на использовании сил поверхностного натяжения в каплях малых размеров. Например, такие капли можно подвешивать в пространстве различными способами [54] или же размещать их на гидрофобных поверхностях [19]. Добротность подобных резонаторов может быть порядка  $Q \sim 10^4 - 10^6$ , что позволяет наблюдать такие эффекты как индуцированное Рамановское рассеяние [25, 55, 56], были созданы и обычные лазеры на основе Родамина [57] и квантовых точек [26].

Поверхностное натяжение также определяет гладкую форму резонаторов, полученных переплавкой стекла, так, например, были получены микросферы почти идеальной формы методом переплавки оптического волокна [58]. Уже в этой работе, изучающей, в частности, свойства нелинейной оптической бистабильности отмечался большой потенциал МШГ микрорезонаторов, например, в качестве основных элементов будущего квантового компьютера. Действительно, в этих резонаторах уже стало возможным наблюдать существенно квантовые эффекты. Например, наблюдались эффекты из квантовой электродинамики в микросферах, легированных наночастицами [59, 60]. Также подобные резонаторы использовались для детектирования мельчайших частиц, оседающих на поверхность, в частности, вирусов [33]. Путем добавления различных элементов можно получить и твердотельные лазеры [61, 62].

Путем комбинирования методов литографии и использования сил поверхностного натяжения были получены и микрорезонаторы тороидальной формы [5]. Подобные резонаторы демонстрируют высокую степень связи между оптическими модами и модами механических колебаний, связанную с высоким оптическим давлением на стенки резонатора [29]. Поскольку, как правило, при подобной связи механическая энергия переходит в оптическую, этот эффект на практике стал широко использоваться в охлаждении механической моды колебаний до основного состояния [30]. Изготовленные методом литографии диски на подставке проявляют даже лучшую оптомеханическую связь, несмотря на несколько меньшую добротность [27]. Тороидальные резонаторы использовались также для нелинейной генерации

комбинационных частот [63] и в более сложных экспериментах по нелинейной оптике [64–66].

Были получены и резонаторы других форм, как, например, бутылочные резонаторы [6]. Большой модовый объем таких резонаторов и возможность реализации сильной внешней связи делает такие резонаторы интересными с точки зрения атомно-оптического взаимодействия [67]. Как и в работе посвященной микросферам [58], для бутылочных резонаторов также изучались нелинейные свойства типа бистабильности [68, 69]. Также возможно создание полых 'бутылочных' резонаторов или 'пузырьковых' резонаторов [70, 71], которые, вероятно, найдут применение в химическом детектировании.

Нагревая оптическое волокно, можно создать локальные, аксиально симметричные утолщения нано масштабов, в которых тоже могут существовать МШГ. Эта технология использует напряжение в волокне, которое при нагревании приводит к появлению малых утолщений. Такая технология позволяет добиться атомарной точности [72]. Лазерный нагрев может быть использован для получения и больших кварцевых стержней высокого качества. При этом при изготовлении конических форм можно наблюдать интересные, противоречащие интуиции явления в открытых резонаторах, такие как существование квази-моды в коническом резонаторе [73, 74].

К сожалению, изготовить хороший резонатор из кристаллического материала со сверхнизким поглощением возможно только методом механической полировки. Таким способом, например, был изготовлен один из первых сферических твердотельных лазеров из  $CaF_2 : Sm^{++}$  [9]. Рекордно высоких показателей добротности (более  $10^{10}$ ) возможно добиться на основе чистых флюоритовых материалов [20]. Подобные сверхвысокодобротные резонаторы также используются для генерации комбинационных частот [75] и в области оптомеханики [28]. Еще одно преимущество кристаллических материалов в том, что они могут быть анизотропны и, следовательно, имея нелинейности второго порядка, использоваться в квантовой оптике [76] и фотонике [61]. На дисковых резонаторах из кристаллических материалов возможно реализовать оптическое сжатие [77], оптическую запутанность,



когерентное преобразование частоты [78], квантовую память [79] и хороший источник единичных фотонов со сверхузким спектром [80].

Отдельно рассматривая изготовление резонаторов методом литографии, мы должны отметить, что предоставляя огромный простор по формам и материалам (с учетом естественных ограничений плоской литографии), удобство и дешевизну производства, а также легкость интегрирования в любые иные оптоэлектронные системы, такой способ изготовления не позволяет добиться хорошего качества поверхности и сверхвысокой добротности [13]. Тем не менее, используя изотропные материалы типа кварца, при искусственном применении литографии, возможно добиться качества поверхности сравнимого с качеством, полученным механической полировкой или капельным методом, рассмотренными выше [81]. Огромное разнообразие форм, возможных при применении литографии, дает большое разнообразие новых интересных эффектов. Особенно интересны несимметричные открытые резонаторы, которые могут демонстрировать сложное, хаотическое поведение света в почти сферических резонаторах [82, 83]. Асимметричные резонаторы дают хаотическое излучение и в микродисковых квантово каскадных [84] и субволновых лазерах [85], в которых генерируют МШГ низкого порядка. Описание таких асимметричных открытых резонаторов не может проводиться в рамках теории Ми из-за неинтегрируемости геометрической системы, что сильно усложняет анализ, так что приходится использовать понятие хаотических волн. [86]. Тем не менее на данный момент разработана даже полуклассическая теория лазеров с подобными резонаторами [87].

Помимо таких МШГ форм существуют близкие по типу миниатюрные монолитные резонаторы, стенки которых не прямые, они так же рефокусируют луч, на них тоже происходит полное внутреннее отражение, но при этом мода распространяется не всегда вдоль стен. Например, можно создать резонатор, имеющий форму 'квадрата, с выпуклыми стенками' [88]. Подобные резонаторы изучались в экспериментах с удвоением частоты [89] и параметрической генерацией [90].

Важнейшим для приложений является эффективность ввода и вывода энергии из данной моды. Именно с разработкой хорошей технологии

подключения оптической системы к резонаторам они стали широко коммерчески использоваться [91]. МШГ отличаются полным внутренним отражением, а потери на утечку света из-за сферичности поверхности всегда несоизмеримо меньше, чем потери в материале и рассеянии на неоднородностях. Малые потери утечки означают, что МШГ практически не связаны с модами свободного пространства, следовательно, и наоборот, моды свободного пространства будь то пучок света из линзы или плоская волна никогда не будут сколько-нибудь существенно возбуждать МШГ, что прямо следует из теории Ми [92].

Именно поэтому ввод и вывод оптического излучения нужно осуществлять с помощью других волноводных структур. При этом крайне нежелательно возбуждение МШГ более высокого радиального порядка, чем основной. Коэффициент качества связи записывается в процентах и определяется как отношение мощности, введенной в желаемую моду, к мощности, выведенной из волновода или иного устройства и введенной во все возможные моды, а также излученной в пространство. Так коэффициент, равный 100%, означает, что вся мощность, подведенная к резонатору, была введена в желаемую моду. Известно, что, например, в случае введения мощности при помощи волновода, одним из условий идеальной связи является т.н. условие критической связи, когда потери в свободном резонаторе равны 'потерям' волновода на введение излучения в желаемую моду (коэффициенту связи). Также для идеальной связи требуются фазовое и частотное согласования. Также требуется очень малая связь с нежелательными модами [93].

Простейшим способом является введение через призму. При этом свет вводится в призму, испытывает полное внутреннее отражение от грани, поднесенной к резонатору, часть мощности при этом туннелирует в МШГ. Самый лучший достигнутый коэффициент качества связи при этом составляет 80% [94], как правило, это значение существенно ниже. Также можно вводить мощность при помощи обычных волноводов, поднесенных к сфере, однако, из-за разницы констант распространения в резонаторе и в волноводе не удастся добиться хорошего фазового согласования, поэтому, как правило, коэффициент качества связи тоже довольно низок [95]. В призме результа-

ты лучше, поскольку фазовое согласование можно обеспечить изменением угла падения пучка. Наилучших же результатов (99.99%) удается добиться при помощи волноводов с сужениями [96].

Волновод, поднесенный к МШГ резонатору, образует простейший заградительный фильтр, отфильтровывающий частоты резонатора. Если с другой стороны резонатора поднести второй волновод, мы получим простейший пропускающий фильтр (пропускает частоты резонатора). Полоса усиления подобных фильтров имеет лоренцеву форму, ширина их полосы пропускания и полосы запирания определяются, обычно, коэффициентом связи плюс коэффициент потерь резонатора [97]. В приложениях же важно, чтобы полоса пропускания имела плоскую вершину и резкие границы, поэтому на практике фильтры на одном резонаторе почти не применяются.

Для того чтобы добиться практически идеальной формы и ширины полосы пропускания на практике широко применяются [98] каскадные фильтры с несколькими связанными МШГ резонаторами [22]. При этом возможно обеспечить очень точную настройку полосы пропускания, скажем, используя электрооптический эффект в ниобате лития [99]

В заключении обзора МШГ резонаторов выделим их главные особенности: 1) Высокая добротность  $Q$ ; 2) Относительно малый модовый объем  $V$ . Поскольку сила нелинейных эффектов в резонаторе определяется соотношением  $Q^2/V$ , то в этом смысле лучше пожертвовать малым модовым объемом с целью увеличения добротности. Поэтому МШГ резонаторы превосходят все остальные, и именно в них лучше всего наблюдать различные нелинейные эффекты [17].

## 1.2 Постановка задачи о дефекте полудискового резонатора

Как известно [100], решение уравнений Максвелла в цилиндрической области общего вида (не обязательно в круговом цилиндре) с идеально проводящими стенками сводится к решению двумерного уравнения для проек-

ции напряженности электрического (ТМ мода) или магнитного (ТЕ мода) векторов напряженности на ось цилиндра. Уравнение для соответствующей компоненты имеет вид

$$\Delta\phi + k^2\phi = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями  $\phi = 0$  для ТМ моды и  $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$  для ТЕ моды. В общем случае в уравнение входит показатель преломления среды  $n_c \neq 1$  и необходимо положить  $k^2 \rightarrow n_c^2 k^2$ , но мы выберем единицы измерения так чтобы  $\frac{c}{n_c} = 1$ . Следует помнить что величины  $k$  и  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  относятся

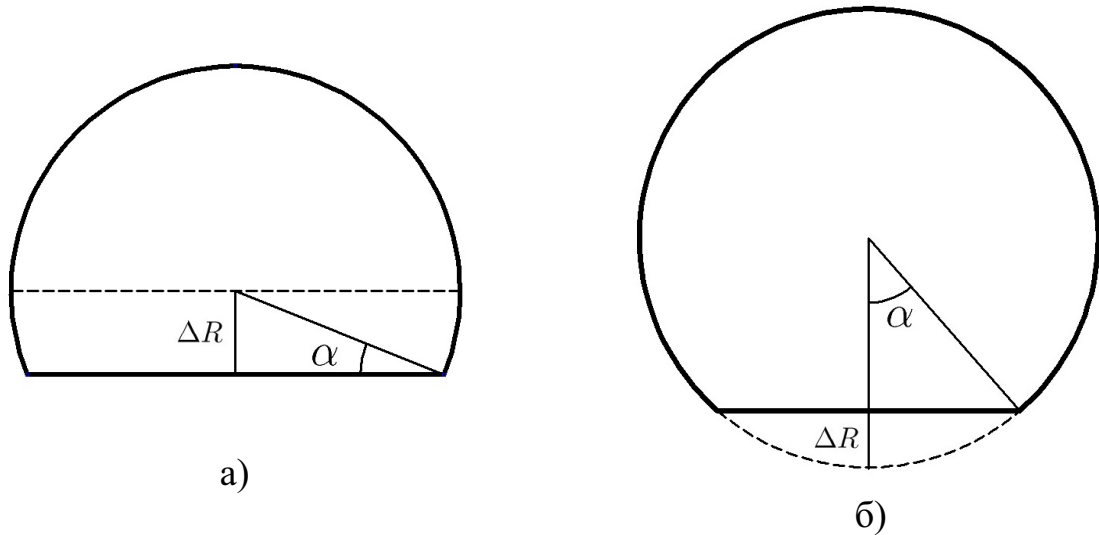


Рисунок 2 – Рассматриваемые неидеальные области, близкие к - полудиску(а) и диску (б)

ся к двумерной задаче. Полный же квадрат волнового числа в трехмерном пространстве состоит из двух слагаемых  $k_p^2 = k_\zeta^2 + k^2$ .

Как будет показано ниже, величины  $k$  для МШГ неидеальных резонаторов имеют вид

$$k = k_0(1 + \delta), \quad (2)$$

где  $k_0$  - невозмущенное поперечное волновое число, а  $\delta$  – малая безразмерная величина, слабо зависящая от номера моды. Поэтому для 'возмущенного' полного волнового числа  $k'_p$  следует использовать формулу  $k'_p = k_{p0}(1 + \frac{k_0^2\delta}{k_{p0}^2})$ , где  $k_{p0}$  -невозмущенное полное волновое число.

### 1.3 Решение задачи о полудисковом резонаторе

Рассмотрим случай полудискового резонатора, изображенного на Рис. 2а. Систему единиц всегда можно выбрать так, чтобы радиус диска  $R = 1$ . Введем цилиндрические координаты  $(r, \varphi)$ . Координаты выбраны так, что прямая часть границы полудиска соответствует углам  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ . Тогда решением задачи (1) для полудиска единичного радиуса будет

$$\phi_{m,n} = A_{m,n} J_m(p_{m,n} r) \sin(m \varphi) \quad k_{m,n} = p_{m,n} \quad (3)$$

Здесь  $J_m$  - функция Бесселя  $m$ -го порядка,  $p_{m,n}$   $n$ -й нуль функции Бесселя  $m$ -го порядка, а  $m$  - натуральное число. Для упрощения работы с теорией возмущений коэффициент  $A_{m,n}$  выбран так, чтобы нормировка функций соответствовала  $\int_A |\phi_{m,n}|^2 dS = 1$ , где интегрирование производится по всему полудиску. Отсюда получим

$$A_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} \int_0^1 J_m(p_{m,n} r)^2 r dr}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4} |J_{m-1}(p_{m,n})|}}$$

При  $m \gg 1$  и  $n \ll m$  функция Бесселя существенно отличается от нуля только при  $r \approx 1$ . То есть решение (3) сосредоточено вблизи границы полудиска. Такие моды будут модами шепчущей галереи для этого резонатора.

Решение (1) для области на Рис. 2а можно получить конформным отображением указанной области на полукруговую. Если функция  $w(z)$  ( $z = x + iy$ ) осуществляет такое преобразование, то уравнение (1) запишется в виде

$$\Delta \psi = -k^2 \cdot \psi \cdot \left| \frac{dw}{dz} \right|^2. \quad (4)$$

Здесь оператор  $\Delta$ , функция  $\left| \frac{dw}{dz} \right|^2$  и функция  $\psi$  рассматриваются в координатах для области полудиска. Если область на Рис. 2а близка к полудиску, то существует близкое к тривиальному преобразование  $w(z) \approx z + \alpha g(z)$  с малым постоянным параметром  $\alpha$ . Тогда  $\left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \approx 1 + \alpha f(z)$ . Таким образом,

с точностью до членов первого порядка малости по  $\alpha$  уравнение (4) имеет вид

$$\Delta\psi + k^2\psi = -\alpha k^2\psi f \quad (5)$$

Это уравнение с малой правой частью для простой области полудиска с прежними граничными условиями  $\psi = 0$ . Для нее в случае  $\alpha = 0$  решения  $\phi_{m,n}$  известны. Для (5) можно использовать стандартную теорию возмущений [101], из которой следует, что с точностью до членов первого порядка малости по  $\alpha$

$$k^2 = k_{m,n}^2 \left(1 - \alpha \int_A f \cdot \phi_{m,n} \cdot \phi_{m,n}^* dS\right) \quad (6)$$

В нашем случае отображение формы Рис. 2а на полукруг можно произвести функцией

$$z = \frac{\left(\frac{b+w}{b-w}\right)^{\frac{\pi}{2\lambda}} - 1}{\left(\frac{b+w}{b-w}\right)^{\frac{\pi}{2\lambda}} + 1}. \quad (7)$$

Здесь  $\lambda = 2 \arctg\left(\frac{1+\sin\alpha}{b}\right)$  и  $b = \cos\alpha$ . Разложив функцию (7) в ряд с точностью до первого порядка малости по  $\alpha$ , получим  $w = z + \frac{\alpha}{\pi}(1 - z^2) \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ .

тогда  $f(r, \varphi)$  в выражении (5) примет вид

$$f(r, \varphi) = \frac{2}{\pi} \left[ 2 - r \cos(\varphi) \cdot \ln\left(\frac{1 + 2r \cos(\varphi) + r^2}{1 - 2r \cos(\varphi) + r^2}\right) + 2r \sin(\varphi) \cdot \arctg\left(\frac{2r \sin(\varphi)}{1 - r^2}\right) \right].$$

Интеграл в выражении (6) равен

$$\int_A f \cdot \phi_{m,n} \cdot \bar{\phi}_{m,n} dS = \int_0^1 \int_0^\pi A_{m,n}^2 J_m(p_{m,n} r)^2 \sin(m \varphi)^2 f(r, \varphi) r d\varphi dr. \quad (8)$$

Поскольку  $\sin(m \varphi)^2 = \frac{1 - \cos(2m \varphi)}{2}$ , а при больших  $m$  функция  $\cos(2m \varphi)$  - быстро осциллирует, по сравнению с медленно меняющийся  $f(r, \varphi)$ , то при интегрировании по углу слагаемым  $\cos(2m \varphi)$  можно пренебречь, оставляя только  $\frac{1}{2}$ . Интеграл (8) тогда равен  $4/\pi$ .

Подставив этот результат в (6), получим конечную формулу для волнового числа данной моды (в обычных единицах измерения)

$$k = k_0 (1 + \delta), \quad \delta = -\alpha \frac{2}{\pi}, \quad (9)$$

где  $k_0 = \frac{p_{m,n}}{n_c R}$  - невозмущенное волновое данной моды число, а  $n_c$  - показатель преломления.

ТЕ моде волновода соответствует задача с однородными граничными условиями Неймана  $\frac{\delta\phi}{\delta n} = 0$ . Рассуждения, полностью аналогичные рассуждениям для ТМ моды, дадут выражение, полностью повторяющее (9) с отличием в выражении для невозмущенного волнового числа  $\frac{\eta_{m,n}}{n_c R}$ , где  $\eta_{m,n}$  -  $n$ -й нуль производной функции Бесселя  $m$ -го порядка.

При  $m \rightarrow \infty$  собственные числа мод шепчущей галереи можно рассчитать из условия кратности набега фаз числу  $\pi$ , то есть  $k n_c (\pi + 2\alpha) R = m\pi$  или

$$k = \frac{m}{n_c R} \left(1 - \alpha \frac{2}{\pi}\right). \quad (10)$$

В выражении (9) при  $m \rightarrow \infty$  будет  $p_{m,n} \approx m$

и выражения (10) и (9) совпадут. Таким образом, формула (9) подтверждается в предельном случае.

Для применимости формулы необходимо, чтобы собственные числа уравнения (5) для неидеального резонатора хорошо описывались первым приближением теории возмущений по параметру  $\alpha$ . Это условие заведомо выполняется, если поля мод, соответствующих данному собственному числу в возмущенном и невозмущенном резонаторах, отличаются несильно. Из теории дифракции известно, что для этого размер дефекта границы, параллельной вектору Пойнтинга, должен быть много меньше длины волны. В описываемом случае характерный размер возмущения, которое приводит к качественному изменению поля, связан с углом  $\alpha$  формулой  $\Delta L = R(1 - \cos(\alpha)) \approx \frac{1}{2}R\alpha^2$ . В результате из  $\Delta L \ll \lambda$  получаем эквивалентные условия  $\alpha \ll \sqrt{\lambda/R}$ ,  $\alpha \ll \sqrt{2\pi/m}$ . Для  $m = 600$  имеем  $\alpha \ll 0.1$ .

В таб. 1 проведено сравнение формулы (9) и численного компьютерного расчета. Из нее видно, что даже для сравнительно небольшого  $m = 100$  формула (9) при  $\Delta R = \alpha = 0.26$  дает погрешность в 10 %, что подтверждает применимость (9) и при сравнительно сильных неидеальностях.

$\Delta R/\lambda$	$\Delta R$	$k_f^2$	$k_c^2$	$\frac{k_c^2 - k_f^2}{k_c^2}, \%$
1.7	0.1	$1.03 \cdot 10^4$	$1.04 \cdot 10^4$	1
2.1	0.12	$1.00 \cdot 10^4$	$1.02 \cdot 10^4$	2
2.4	0.14	$9.73 \cdot 10^3$	$9.97 \cdot 10^3$	2.4
2.8	0.16	$9.43 \cdot 10^3$	$9.74 \cdot 10^3$	3.3
3.1	0.18	$9.13 \cdot 10^3$	$9.52 \cdot 10^3$	4
3.5	0.2	$8.82 \cdot 10^3$	$9.30 \cdot 10^3$	5
3.8	0.22	$8.52 \cdot 10^3$	$9.10 \cdot 10^3$	6.3
4	0.24	$8.22 \cdot 10^3$	$8.90 \cdot 10^3$	7.6
4.5	0.26	$7.92 \cdot 10^3$	$8.71 \cdot 10^3$	9

Таблица 1 – Неидеальный полудиск. Результат полученный численным решением задачи на компьютере ( $k_c^2$ ) и по формуле (9) ( $k_f^2$ ) при различных  $\Delta R = \alpha$ . Радиус диска  $R=1$ ,  $m=100$ , невозмущенное значение  $k_0^2 = 1.18 \cdot 10^4$ . Величина  $\frac{\Delta R}{\lambda}$  - отношение размера дефекта к длине волны

#### 1.4 Постановка задачи о дефекте дискового резонатора

Перейдем теперь к другой, похожей внешне задаче - в качестве невозмущенной области рассмотрим диск, а в качестве возмущенной - диск с малым сколом (рис. 2б). Малый угол  $\alpha$  связан с малым дефектом по радиусу  $\frac{\Delta R}{R} \ll 1$  формулой  $\frac{\Delta R}{R} = 1 - \cos(\alpha) \approx \frac{\alpha^2}{2}$ .

Для этой задачи метод конформных отображений применим плохо, поскольку конформное отображение качественно изменяет форму круга, и из-за этого сингулярно. Поэтому для второй задачи мы применим метод граничных возмущений [101].

Известно, что любое решение  $\psi(\vec{r})$  с собственным числом  $k$  уравнения (1) для возмущенной области (лежащей внутри невозмущенной) с граничными условиями  $\psi(\vec{r}) = 0$  удовлетворяет внутри этой области точному интегральному уравнению

$$\psi(\vec{r}) = \sum_q \phi_q(\vec{r}) \oint_{S_0} \phi_q^*(\vec{r}_0) \frac{\delta\psi(\vec{r}_0)}{\delta n_0} \frac{dl_0}{k_q^2 - k^2}, \quad (11)$$



где функции  $\phi_q(\vec{r})$  с волновыми числами  $k_q$  - решения для невозмущенной области. Если при этом возмущение мало, то собственное число  $k$  будет очень близко к одному из невозмущенных собственных чисел  $k_q$ , т.е.  $k \approx k_q$  для некоторого  $q$ . Интегрирование и дифференцирование в данном выражении производится по координатам  $r_0$ , а  $\vec{n}_0(\vec{r}_0)$  - нормаль к поверхности возмущенной области в точке  $r_0$ . Интегрирование производится по контуру - границе возмущенной области.

В нашем случае моды  $\phi_q$  дважды вырождены, то есть невозмущенному значению  $k_q$  соответствуют две ортогональные моды, поэтому приближение для  $\psi$  ищется в виде  $\psi(\vec{r}) = a_1\phi_1(\vec{r}) + a_2\phi_2(\vec{r})$ . Умножив полученное выражение на  $\phi_j^*$  ( $j = 1, 2$ ) и проинтегрировав по невозмущенной области, получим из ортогональности мод систему однородных алгебраических уравнений, решение которой существует при равенстве нулю определителя.

$$\begin{vmatrix} V_{1,1} + k^2 - k_0^2 & V_{1,2} \\ V_{2,1} & V_{2,2} + k^2 - k_0^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (12)$$

где

$$V_{i,j} = \oint \phi_i^*(\vec{r}_0) \frac{\delta\phi_j(\vec{r}_0)}{\delta n_0} dl_0. \quad (13)$$

### 1.5 Решение задачи о дефекте дискового резонатора

Решением задачи (1) для диска единичного радиуса с однородными граничными условиями  $\phi = 0$  являются функции

$$\phi_{m,n} = B_{m,n} J_m(p_{m,n} r) e^{\pm im\varphi} \quad k_{m,n} = p_{m,n}.$$

При этом одному значению  $k_{m,n}$  отвечают две ортогональные моды с показателями степени  $\pm im\varphi$ . Примем, как и в предыдущем примере,  $\int_A |\phi_{m,n}|^2 dS = 1$ . Тогда  $B_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{2}$ .

При вычислении матричных элементов (13) необходимо вести интегрирование лишь по возмущенным участкам границы, поскольку на невозму-

щенных выполняется  $\phi_j = 0$  Тогда

$$V_{1,1} = V_{2,2} = \int_{-\alpha}^{\alpha} B_{m,n}^2 J_m(p_{m,n} r) \left[ J'_m(p_{m,n} r) \cos(\varphi) p_{m,n} + \frac{i m \sin(\varphi) J_m(p_{m,n} r)}{r} \right] \frac{\cos(\alpha)}{\cos^2(\varphi)} d\varphi, \quad (14)$$

где  $J'_m(p_{m,n} r) = \frac{dJ_m(x)}{dx} \Big|_{x=p_{m,n} r}$ . При интегрировании по границе следует положить  $r = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\varphi)}$ .

Для  $V_{1,2} = V_{2,1}^*$  в выражении (14) под знаком интеграла появится множитель  $e^{\pm i 2m\varphi}$ . Разложив  $J_m(p_{m,n} r)$  в ряд возле значения  $r = 1$  с точностью до третьего порядка малости по  $\alpha$  (полагая, что  $m\alpha$  произвольно, а не мало), получим из (12) конечную формулу для  $\delta$  из (2)

$$\delta^{\pm} = \frac{\alpha^3}{3\pi} \pm \frac{\Delta}{2}, \quad (15)$$

где  $\Delta = (k^+ - k^-)/k_0 = \frac{1}{2\pi m^2} (\alpha \cos(2m\alpha) - \frac{\sin(2m\alpha)}{2m})$  определяет расщепление волновых чисел.

В выражение (15) не входит функция Бесселя и её производные, поскольку их оказывается возможным исключить после интегрирования при помощи точной формулы  $J_{m-1}(p_{m,n}) = J'_m(p_{m,n})$ .

Следует подчеркнуть, что мы нигде не вводили ограничений на  $m$  или  $n$ , поэтому формула (15) применима для любой моды, для которой справедливо приближение  $\psi(\vec{r}) = a_1 \phi_1(\vec{r}) + a_2 \phi_2(\vec{r})$ . В частности для мод шепчущей галереи физический смысл такого приближения в том, что мощность МШГ возмущенного резонатора остается распределенной вблизи стенок резонатора.

Аналогичные рассуждения можно провести для ТЕ моды. При этом в ходе рассуждений все промежуточные выражения отличаются из-за отличия граничных условий, однако, после интегрирования и упрощений мы вновь получим формулу (15) с единственным отличием - для ТЕ невозмущенное волновое число вырожденных мод  $k_0 = \frac{\eta_{m,n}}{n_c R}$ , где  $\eta_{m,n}$  -  $n$ -й нуль производной функции Бесселя  $m$ -го порядка. При вычислении использована точная

$\Delta R/\lambda$	$\Delta R$	$k_f^2$	$k_c^2$	$\frac{k_c^2 - k_f^2}{k_c^2}, \%$
0.55	0.1	$1.251 \cdot 10^3$	$1.253 \cdot 10^3$	0.2
0.67	0.12	$1.258 \cdot 10^4$	$1.257 \cdot 10^4$	0.1
0.78	0.14	$1.266 \cdot 10^3$	$1.264 \cdot 10^3$	0.2
0.83	0.15	$1.274 \cdot 10^3$	$1.266 \cdot 10^3$	0.6

Таблица 2 – Неидеальный диск. Обозначения повторяют Табл. 1. Радиус диска  $R=1$ , номер невозмущенной моды  $m=29$ , значение невозмущенного поперечного собственного числа  $k_0^2 = 1.227 \cdot 10^3$ . Собственные числа получены для тех размеров дефектов, при которых поле моды качественно еще можно отнести к модам шепчущей галереи.

формула  $J_m''(\eta_{m,n}) = \left(\frac{m^2}{\eta_{m,n}^2} - 1\right)J_m(\eta_{m,n})$ .

Границы применимости, как и в случае полудискового резонатора, определяются характерными размерами дефекта по сравнению с длиной волны. В данном случае необходимо потребовать, чтобы  $\Delta R \ll \lambda$ , что приводит к условиям  $\alpha \ll \sqrt{\lambda/R}$ ,  $\alpha \ll \sqrt{2\pi/m}$ , формально совпадающими с таковыми для полудиска.

При возрастании  $\alpha$  расщепление  $\Delta$  начинает осциллировать с частотой  $2m$  вокруг нуля, возрастая по амплитуде. Огибающую легко найти  $|\Delta|_{max} = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha}{m^2}$ . Отсюда видно, что максимальное расщепление медленно увеличивается с ростом  $\alpha$  и быстро уменьшается с ростом  $m$ , поэтому  $\Delta$  для МШГ ( $m \gg 1$ ) вряд ли может быть получено прямым измерением спектра, однако, в некоторых случаях можно измерить расщепление, пропустив излучение через нелинейную среду и измерив разностную частоту.

В таблице 2 сравниваются результаты формулы (15) и численного расчета на компьютере. Для дисковой формы резонатора характерно очень сильное искажение поля моды при небольших дефектах. При этом формула (15) дает хорошее приближение для собственных чисел даже для сильно искаженных полей, хотя само понятие моды шепчущей галереи к таким модам может оказаться неприменимо. На Рис. 14 показано, насколько сильно поле меняется при малых по сравнению с длиной волны деформациях.

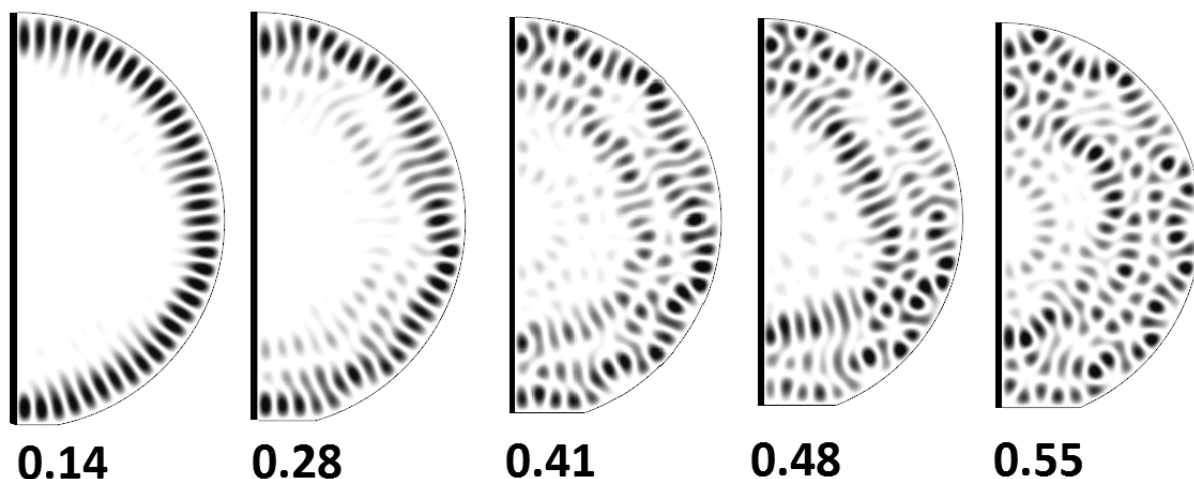


Рисунок 3 – Распределение величины модуля проекции на ось  $z$  вектора электрического поля ( $|E_z|$ ) для ТМ моды ( $m=37, n=1$ ), полученное численным расчетом при различных значениях размера дефекта  $\frac{\Delta R}{\lambda}$  (указан под каждой из структур). Более темные участки соответствуют большей величине поля. На рисунке изображены только половины возмущенных дисков, жирной линией обозначены линии симметрии.

## 1.6 Заключение

В заключении отметим, что в этой главе проведен расчет спектров МШГ для резонаторов полудисковой (9) и дисковой (15) форм, возмущенных специальным образом. Формулы получены в первом приближении.

Сдвиг моды для полудиска линейно зависит от величины возмущения. Поле, как показывает компьютерный расчет, устойчиво к возмущению и остается распределено вдоль стенок пока размер бокового дефекта меньше длины волны.

Для резонатора дисковой формы спектр зависит от линейных размеров возмущения слабее. Однако, поле МШГ такого резонатора гораздо сильнее зависит от рассмотренной неидеальности. Если возмущение больше, чем половина длины волны, то поле МШГ оказывается сильно искажено и перераспределяется по объему резонатора. Кроме того, сколь угодно слабое возмущение границы снимает вырождение мод, поэтому бегущие волны, существующие в идеальном диске, переходят в две близкие по спектру стоячие волны.

## 2 ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ МИКРОСФЕР С ТОНКИМ ПОКРЫТИЕМ ИЗ ЛЮМИНОФОРА НА МОДАХ ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ

### 2.1 Введение

Взаимодействие отдельного атома или квантовой точки с высокодобротной модой резонатора с малым объемом поля это чрезвычайно интересная с точки зрения квантовой электродинамики область [102]. Как было упомянуто выше, МШГ как раз относятся к таким высокодобротным модам с малым объемом поля, поэтому подобные эксперименты по проверке самых фундаментальных основ физики проводят и с ними.

Когда добротность моды возрастает чрезвычайно сильно, а количество атомов очень мало и они соединены в квантовую точку, имеет место т.н. эффект сильной связи. При этом вместо отдельной линии свечения на моде резонатора, наблюдаются две разнесенные линии [103]. Если взаимодействия между атомом и полем нет, а резонатор идеальный, то имеет место вырождение по энергии с двумя состояниями 'невозбужденный атом + фотон' и 'возбужденный атом + отсутствие фотона'. Однако, когда связь появляется, это вырождение снимается и имеют место осцилляции Раби между двумя энергиями. Если время жизни фотона много больше периода этих осцилляций, т.е. добротность достаточно велика, то эти осцилляции и становится возможным наблюдать [104].

Подобные эксперименты, как правило, проводят в различных микроемкостях, типа Фабри-Перо [102], однако тот же эффект возможно наблюдать и в высокодобротных МШГ сферах [105].

Если связь не столь сильна или добротность не столь велика, то 'сильная связь' переходит в 'слабую связь' и имеет место не менее интересный эффект усиления спонтанного излучения или, иначе, эффект Парселла [106]. Этот эффект наблюдается для единичной квантовой точки в микрорезонаторе Фабри-Перо [107]. Тот же эффект для единичной квантовой точки

наблюдался и в МШГ дисках различных добротностей  $Q \sim 10^4$  [108–110].

Однако, эффект Парселла можно наблюдать и в резонаторе со множеством квантовых точек. Так его можно наблюдать в микрорезонаторах Фабри-Перо для множества квантовых точек [111] или в микродисках [112, 113]. Вместе с тем известно [114], что для источника с широким спектром, эффект Парселла наблюдаться уже не будет.

Тем не менее, если заполнить микрорезонатор активным веществом, а не распределять его точками, то под действием внешнего лазерного излучения, характерный спектр также возникает, хотя он и обусловлен теперь не спонтанным излучением как в эффекте Парселла, а вынужденным. На эту тему существует огромное количество разнообразных работ, в частности, для микрорезонаторов сферической формы. Например, такой спектр наблюдали в микрокаплях красителя [57, 115], в микропузырьках красителя [116], в твердых сферах из полимера с красителем [117] и во многих других случаях [25, 118–120]. Спектр именно такого происхождения мы наблюдаем в нашей работе.

Высокая чувствительность МШГ к изменению граничных условий на поверхности микрорезонатора обусловлена локализацией электромагнитного поля МШГ вблизи поверхности и проникновением части поля за пределы микрорезонатора в окружающее пространство [33, 121]. Следствием этого является возможность использования микрорезонатора с МШГ в качестве поверхностных оптических сенсоров [33, 37]. Действие сенсоров на основе МШГ заключается в измерении сдвига спектрального положения резонансных линий МШГ при адсорбции вещества на поверхность микрорезонатора [33, 121, 122]. Сдвиг резонансной линии возникает из-за взаимодействия осажденного на поверхность микрорезонатора объекта с затухающим полем МШГ [33, 121]. Для сферических микрорезонаторов сдвиг положения резонансных линий МШГ можно рассматривать как следствие изменения радиуса и показателя преломления при адсорбции объекта на поверхность [121, 123].

Как следует из теории возмущений, чувствительность сенсора на основе МШГ к адгезии внешних объектов тем выше, чем сильнее поле проника-

ет за пределы микрорезонатора [123]. Для сферических микрорезонаторов с МШГ величина сдвига резонансной линии при адсорбции вещества на его поверхности обратно пропорциональна радиусу микрорезонатора [32]. В работах [32, 124] показана высокая чувствительность МШГ к адсорбции биологических объектов для сферических микрорезонаторов диаметром несколько микрометров. Так, в [32] удалось достичь предела чувствительности  $\sim 3$  фемтограмм для сферического микрорезонатора диаметром  $\sim 2$  мкм. Увеличения чувствительности к адсорбированным объектам можно добиться путем создания на поверхности микрорезонатора оболочки с большим показателем преломления [125, 126]. Влияние параметров оболочки микрорезонатора на добротность и чувствительность к изменению внешних условий обсуждаются в работах [125–127].

Настоящая глава посвящена теоретическому исследованию спектра МШГ в микрорезонаторах, представляющих собой сферическую частицу, покрытую тонкой фотолюминесцентной оболочкой с показателем преломления большим, чем у частицы. Спектральное положение резонансных линий в экспериментальных спектрах (полученных соавторами работы в ФТИ РАН) фотолюминесценции описано в рамках модели МШГ для однородного шара, покрытого тонкой оболочкой. Измерения поляризационных спектров ФЛ позволили идентифицировать принадлежность резонансных линий ТЕ- и ТМ-модам микрорезонатора.

### 2.3 Изучаемый эксперимент и его методика

Для полноты картины вкратце опишем эксперимент, проведенный соавторами и его основные результаты. В этом эксперименте для создания микрорезонатора использовались монодисперсные сферические частицы кремнезема ( $a - SiO_2$ ) диаметром  $D = (3.5 \pm 0.15)$  мкм. Способ изготовления сферических частиц изложен в [128]. Сферические частицы  $a - SiO_2$  наносились на поверхность подложки методом аэрозольного распыления водной

суспензии [129]. Оболочкой микрорезонатора являлась пленка аморфного гидrogenизированного карбида кремния ( $a - SiC : H$ ). Сферические частицы покрывались оболочкой  $a - SiC : H$  методом плазмохимического газофазного осаждения [130]. Пленки  $a - SiC : H$  прозрачны в видимой области спектра и обладают стабильной ФЛ при комнатной температуре [131]. Вещественная часть показателя преломления  $a - SiC : H$  ( $n_s$ ) в диапазоне длин волн от 550 до 800 нм находится в пределах от 3.1 до 2.1 [130]. Вещественная часть показателя преломления  $a - SiO_2$  ( $n_b$ ) равна  $\sim 1.46$ . В данном эксперименте исследовались микрорезонаторы с толщинами оболочки  $a - SiC : H$ , равными 15 и 30 нм.

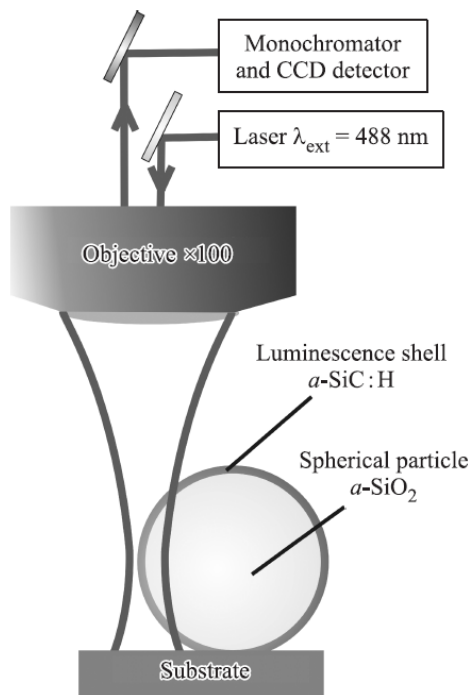


Рисунок 4 – Схема измерения спектров мод шепчущей галереи в сферическом микрорезонаторе.

В качестве плоской подложки применялись пластины монокристаллического кремния КДБ-10. Для проведения поляризационных измерений в качестве подложки для микрорезонатора использовались пластины монокристаллического кремния (КЭФ-15) ориентации (100) со сформированными на их поверхности методом анизотропного травления параллельно расположенными канавками, имеющими V-образный профиль [132]. Угол между боковыми стенками канавок  $\sim 70.5$  градусов, наибольшее расстояние между стенками канавок  $\sim 1.6$  мкм, расстояние между канавками  $\sim 3.4$  мкм.

Возбуждение и регистрация спектров ФЛ проводились при комнатной температуре в геометрии обратного рассеяния с использованием спектрометра микро-КР

'inVia Renishaw' с микрообъективом Leica X100 и охлаждаемым до  $-70^\circ C$  многоканальным детектором, позволяющим осуществлять регистрацию спектров со спектральным разрешением  $\sim 3\text{ cm}^{-1}$ . Для возбуждения ис-



пользовалось линейно поляризованное излучение с длиной волны 488 нм аргонового ионного лазера, фокусируемое на частицу в пятно диаметром  $\sim 1$  мкм. В работе [133] показано, что максимальная регистрируемая интенсивность МШГ в режиме конфокального микроскопа достигается при детектировании сигнала с края сферической частицы. Поэтому микроскоп, с помощью которого вводилось в микрорезонатор возбуждающее лазерное излучение и детектировалось ФЛ, фокусировался в край одиночного сферического микрорезонатора, как это показано на Рис. 4. Путем тонкой подстройки по высоте достигалась максимальная интенсивность сигнала МШГ. Мощность сфокусированного возбуждающего излучения была минимизирована до  $\sim 5$  мкВт во избежание необратимого изменения материала оболочки микрорезонатора из-за теплового воздействия излучения. Для получения изображений микрорезонатора использовался сканирующий электронный микроскоп (СЭМ) Merlin (Carl Zeiss, Германия).

### 2.3 Теория наблюдаемого эффекта

В работе [125] получены характеристические уравнения для МШГ в шаре, покрытом оболочкой (показатель преломления материала оболочки больше, чем шара). Эти уравнения позволяют рассчитать спектральное положение мод как типа ТМ, так и типа ТЕ. Моды ТЕ не имеют радиальной составляющей электрического поля, моды ТМ не имеют касательной к поверхности шара составляющей электрического поля. Физические различия между ТЕ- и ТМ-модами в микрорезонатора проявляются из-за различия граничных условий для ТЕ- и ТМ-мод, обусловленных разными направлениями электрического поля на границе микрорезонатора. Поляризационное расщепление собственных частот оптических ТЕ- и ТМ-мод также наблюдалось в планарных микрорезонаторах Фабри-Перо [134, 135].

Для демонстрации влияния оболочки на спектральное положение МШГ в сферическом микрорезонаторе с использованием характеристических урав-

нений из [125] проведены расчеты спектральных положений мод в зависимости от толщины оболочки. Это характеристическое уравнение для ТЕ моды записывается следующим образом:

$$\frac{n_0 \chi'_l(n_0ka)}{n_s \chi_l(n_0ka)} = \frac{C_l \psi'_l(n_ska) + \chi'_l(n_ska)}{C_l \psi_l(n_ska) + \chi_l(n_ska)}, \quad (16)$$

здесь

$$C_l = \frac{n_s \psi_l(z_b) \chi'_l(z_s) - n_b \psi'_l(z_b) \chi_l(z_s)}{-n_s \psi_l(z_b) \psi'_l(z_s) + n_b \psi'_l(z_b) \psi_l(z_s)}, \quad (17)$$

где  $\psi_l(z) = z j_l(z)$  - функция Риккати-Бесселя, а  $\chi_l(z) = z \nu_l(z)$  - функция Риккати-Неймана, определенные через сферические функции Бесселя  $j_l(z)$  и сферические функции Неймана  $\nu_l(z)$  с порядковым номером  $l$ , соответствующим угловому порядку моды. При этом  $z_b = n_b k(a - t)$ ,  $z_s = n_s k(a - t)$ ,  $k = \omega/c$  - искомое волновое число данной моды,  $a$  - радиус сферы с оболочкой,  $t$  - толщина оболочки. Для получения уравнений для ТМ моды в уравнениях (16) и (17) необходимо сделать формальную замену  $n_s \rightarrow 1/n_s$ ,  $n_0 \rightarrow 1/n_0$  и  $n_b \rightarrow 1/n_b$ , замена касается, конечно, только показателей преломления, не стоящих в аргументах функций. Например  $\frac{n_0 \chi'_l(n_0ka)}{n_s \chi_l(n_0ka)} \rightarrow \frac{n_s \chi'_l(n_0ka)}{n_0 \chi_l(n_0ka)}$ .

Результаты решения этих уравнений показаны на Рис. 5: по оси абсцисс отложена толщина оболочки на поверхности шара, по оси ординат отложено спектральное положение соответствующей моды. При расчете зависимостей 1-5 и 7 вещественные части показателей преломления оболочки и шара принимались равными соответственно  $n_s = 2.25$  и  $n_b = 1.46$ , а внешней среды  $n_0 = 1$ . Расчет выполнен для мод с полярными индексами 22, 23, 24. В приближении волновой оптики полярный индекс соответствует числу длин волн, укладывающихся на окружности шара. Из Рис. 5 видно, что спектральное расстояние между ТЕ- и ТМ-модами с одинаковыми полярными индексами заметно возрастает по мере увеличения толщины оболочки микрорезонатора. Отметим, что когда оболочка отсутствует, простое увеличение радиуса шара не приводит к такому заметному росту спектрального расстояния. Для демонстрации этого факта на Рис. 5 (кривые 6 и 8) также приведены спектральные положения мод ТЕ23 и ТМ23 в случае, когда пока-

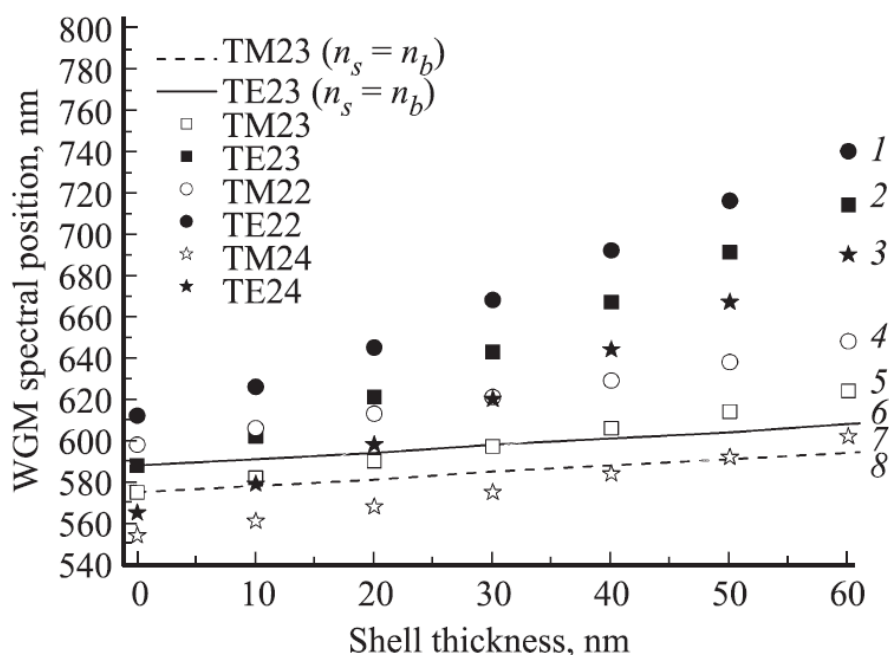


Рисунок 5 – Рассчитанная зависимость спектрального положения МШГ от толщины оболочки сферического микрорезонатора для ТЕ- и ТМ-мод с полярными индексами 22, 23, 24. Показатель преломления шара 1.46, оболочки 2.25 (1-5, 7) и 1.46 (6, 8).

затель преломления оболочки был принят равным показателю преломления шара.

В геометрическом приближении МШГ представляют собой волну, распространяющуюся в узком слое внутри микрорезонатора вдоль его внутренней поверхности и испытывающую многократное полное внутреннее отражение. МШГ проникают за пределы поверхности микрорезонатора в окружающее пространство в виде затухающей волны.

В обычном сферическом резонаторе благодаря проникновению МШГ за границу, разделяющую микрорезонатор и окружающую среду, происходит смещение отраженной от поверхности микрорезонатора волны относительно падающей (эффект Гуса-Генхена), величина которого зависит от типа поляризации моды (ТМ или ТЕ) [136]. Такое смещение можно рассматривать как эффективное увеличение радиуса сферического микрорезонатора. Таким образом, для ТЕ- и ТМ-мод величина эффективного радиуса микрорезонатора будет различной и, как следствие, будет различным их спектральное положение.

Моды шепчущей галереи локализованы у внутренней поверхности микрорезонатора, поэтому нанесение даже тонкой оболочки на его поверхность приводит к значительным изменениям условий резонанса. С ростом толщины оболочки микрорезонатора спектральное расстояние между модами ТЕ и ТМ возрастает заметно сильнее по сравнению со спектральным расстоянием между модами ТЕ и ТМ в микрорезонаторе без оболочки, в котором радиус микрорезонатора увеличен на значение, равное толщине оболочки (рис. 5 ).

На Рис. 6 приведен спектр ФЛ микрорезонатора, представляющего собой сферическую частицу  $a - SiO_2$  без оболочки на плоской подложке. Источником ФЛ в этом случае могут являться, например, ОН-группы в составе сферических частиц  $a - SiO_2$  [137]. Спектральное положение острых линий в спектре ФЛ соответствуют МШГ для однородного шара. На Рис. 6 стрелками показано положение МШГ, полученных подгонкой рассчитанных положений резонансных линий к наблюдаемым экспериментально. Отметим, что спектральное положение МШГ очень сильно зависит от параметров микрорезонатора — размера и показателя преломления. Независимые измерения параметров конкретного микрорезонатора провести затруднительно. Однако известно, что среднеквадратичное отклонение диаметров для различных сферических частиц составляет не более 5 процентов [128]. Тем не менее, даже при таком разбросе размеров микрорезонатора, спектральное положение МШГ различается для различных микрорезонаторов. Поэтому при подгонке рассчитанных положений резонансных линий к полученным экспериментально необходимо варьировать следующие параметры: диаметр сферической частицы  $a - SiO_2$ , ее показатель преломления и показатель преломления  $a - SiC : H$  в микрорезонаторе с оболочкой. Для этого следует провести подбор параметров внутри допустимых значений исходя из известной погрешности. Подбор параметров был осуществлен методом минимизации среднеквадратичного отклонения спектрального положения резонансных ТЕ- и ТМ-мод в расчетном спектре от их положения в экспериментальном спектре. Указанные выше параметры изменялись, пока не достигался минимум среднеквадратичного отклонения, либо пока не

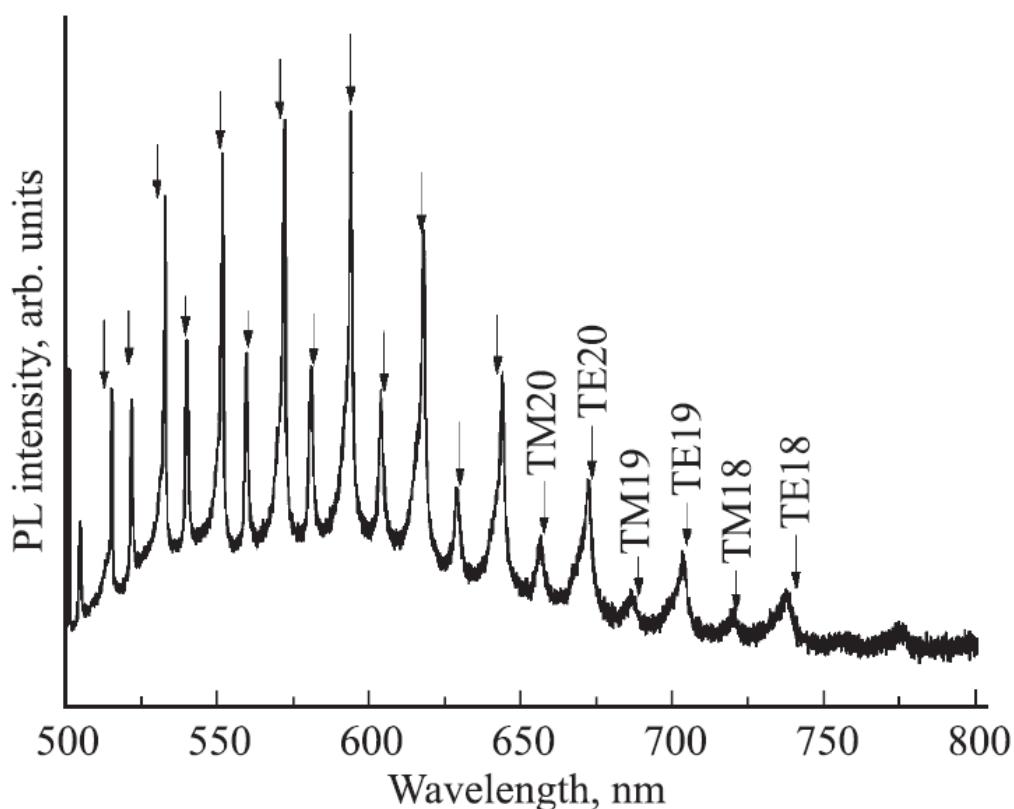


Рисунок 6 – Спектр фотолюминесценции микрорезонатора, представляющего собой сферическую частицу  $\alpha$ -SiO<sub>2</sub>. Стрелками показаны рассчитанные положения МШГ и указаны полярные индексы ТЕ- и ТМ-мод.

достигалась граница погрешности для одного из параметров. Для поиска минимума среднеквадратичного отклонения существует большое количество принципиально различных методов. Для наших целей плохо подходит класс градиентных методов, и поэтому в данной главе использовался метод Нелдера-Мида, который не требует вычисления градиентов [138]. Параметры микрорезонатора без оболочки, полученные в результате подгонки, были следующими:  $D = 3.60$  мкм и  $n_b = 1.44$ . Наблюдаемая в эксперименте меньшая интенсивность ФЛ резонансных линий ТМ-мод по сравнению с ТЕ-модами связана с тем, что поле ТМ-мод больше проникает за пределы микрорезонатора и, следовательно, оказывается более чувствительным к рассеянию на неоднородностях поверхности микрорезонатора.

В спектрах ФЛ для микрорезонатора с оболочкой толщиной 15 и 30 нм (рис. 7, а, b) на фоне широкой полосы ФЛ также наблюдаются узкие интен-

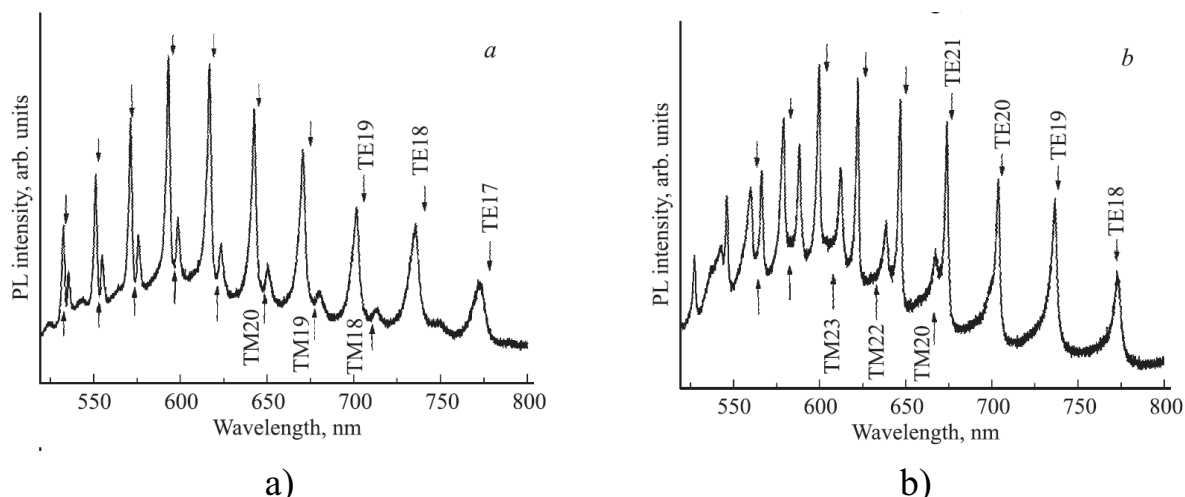


Рисунок 7 – Спектры фотолюминесценции микрорезонатора с оболочкой  $a - SiC : H$  толщиной 15 нм (a) и 30 нм (b) на плоской подложке. Стрелками показаны рассчитанные положения МШГ и указаны полярные индексы TE- и ТМ-мод.

сивные линии. Полученные подгонкой спектральные положения ТМ- и ТЕ-мод отмечены на Рис. 7, а, б стрелками. В расчете варьируемыми параметрами при подгонке являлись показатель преломления оболочки  $a - SiC : H$  ( $n_s$ ), показатель преломления сферической частицы  $a-SiO_2$  ( $n_b$ ) и ее диаметр ( $D$ ). Полученные в результате подгонки параметры микрорезонатора для оболочки толщиной 15 нм были следующими:  $n_s = 2.25$ ,  $n_b = 1.46$  и  $D = 3.5$  мкм; для оболочки толщиной 30 нм:  $n_s = 2.20$ ,  $n_b = 1.46$  и  $D = 3.46$  мкм. Небольшие различия между рассчитанными (полученными подгонкой) значениями положения МШГ и экспериментальными, по-видимому, связаны с искажением модовой структуры микрорезонатора из-за возможного небольшого отклонения формы микрорезонатора от сферической, а также из-за взаимодействия МШГ с подложкой [139]. Чем больше толщина оболочки  $a - SiC : H$ , тем значительнее будет отклонение формы микрорезонатора от сферической, что обусловлено неоднородностью осаждения  $a - SiC : H$ . Утечка МШГ в подложку также приводит к уменьшению добротности микрорезонатора.

Из приведенных на Рис. 5 результатов расчета зависимостей спектральных положений МШГ от толщины оболочки видно, что возможны совпадения спектральных положений ТЕ- и ТМ-мод с разными полярными индек-

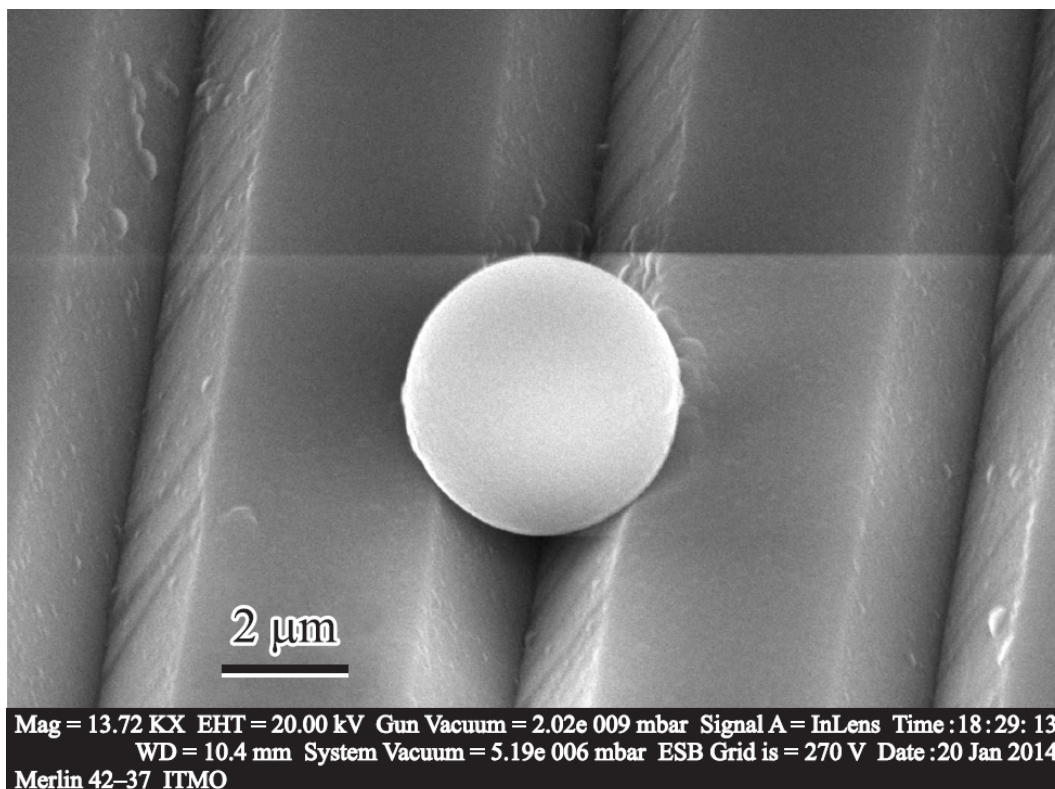


Рисунок 8 – СЭМ-изображение микрорезонатора на кремниевой подложке с канавками, имеющими V-образный профиль.

сами. В этом случае при анализе экспериментальных спектров ФЛ трудно определить принадлежность некоторых близко расположенных линий. Эта задача может быть решена путем проведения измерений поляризационных спектров ФЛ, которые позволяют экспериментально различить принадлежность резонансных линий в спектре ФЛ, относящихся к ТЕ- или ТМ-модам.

В эксперименте, проведенном соавторами, размер области, с которой происходит регистрация сигнала ФЛ ( $\sim 1$  мкм), соизмерим с размером микрорезонатора ( $\sim 3.5$  мкм). Это приводит к тому, что при расположении микрорезонатора на плоской подложке в регистрируемый сигнал ФЛ дают вклад МШГ с разными азимутальными индексами. В этом случае в поляризационных спектрах интенсивности линий, соответствующих ТЕ- и ТМ-модам, практически не отличаются друг от друга.

Чтобы экспериментально различить ТЕ- и ТМ-моды в спектрах фотолюминесценции, микрорезонаторы помещались на канавку с V-образным профилем (рис. 8). Для этого первоначально сферические частицы  $a - SiO_2$

наносились методом аэрозольного распыления водной суспензии на поверхность кремниевой подложки с канавками, имеющими V-образный профиль. Затем сферические частицы покрывались оболочкой  $a - SiC : H$  методом плазмохимического газофазного осаждения. В этом случае микрорезонатор имел две точки касания с боковыми стенками канавки. В результате вклад в сигнал ФЛ, связанный с МШГ, распространяющимися в плоскости вдоль канавки, значительно больше вклада в сигнал ФЛ от МШГ, распространяющихся в плоскости, поперечной канавке [140]. Излучение фокусировалось на край микрорезонатора в точку, равноудаленную от обоих краев щели. Измерения поляризационных спектров проведены для микрорезонатора с оболочкой толщиной 30 нм. Регистрация спектров ФЛ проводилась как при отсутствии поляризатора, так и при двух взаимно перпендикулярных положениях поляризатора X или Y (см. вставку на Рис. 9). Спектры на Рис. 9 нормированы и для наглядности сдвинуты друг относительно друга по оси ординат. При положении поляризатора, обозначенном X, детектируется излучение, поляризованное поперек стенки канавки (рис. 9); соответственно при положении поляризатора, обозначенном Y, детектируется излучение, поляризованное вдоль канавки. Из приведенных на Рис. 9 спектров видно, что в зависимости от положения поляризатора (X или Y) изменяется относительная интенсивность линий ФЛ. При положении поляризатора X наиболее интенсивными являются TE-моды, при положении Y — TM-моды.

## 2.4 Заключение

В этой главе исследованы особенности спектров МШГ в оптических микрорезонаторах, представляющих собой сферические частицы из  $a-SiO_2$ , покрытые тонкой оболочкой из фотолуминесцентного  $a - SiC : H$  с показателем преломления ( $\sim 2.4$ ) больше, чем у частиц ( $\sim 1.46$ ). Расчет спектрального положения МШГ в модели микрорезонатора с оболочкой позво-



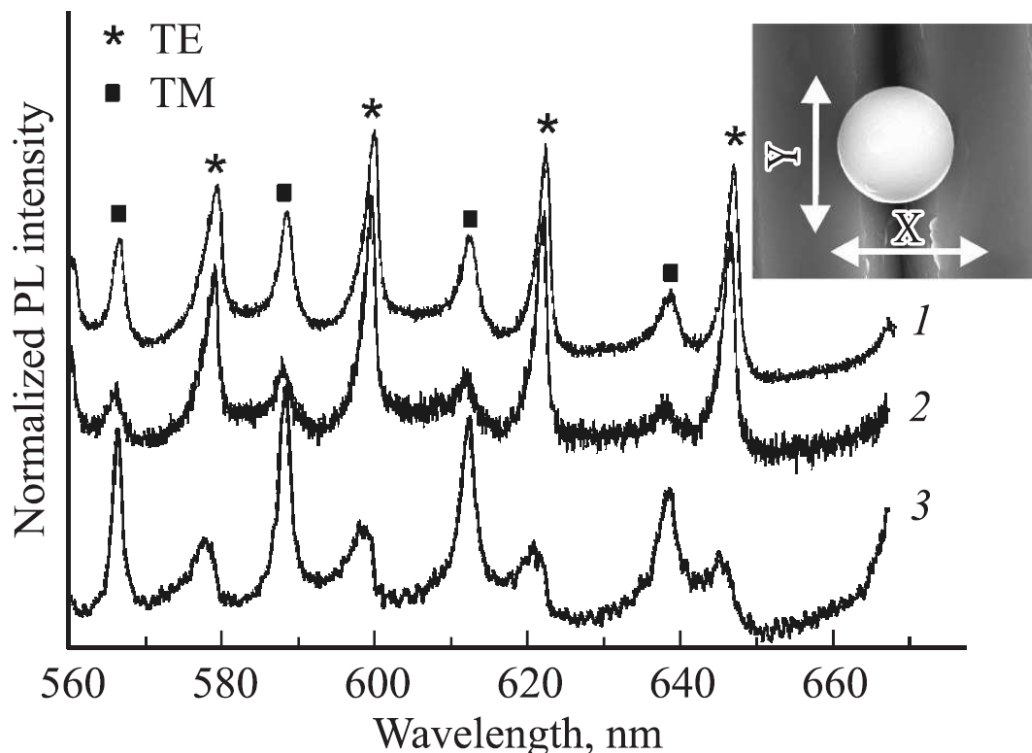


Рисунок 9 – Спектры фотолюминесценции (PL) микрорезонатора с оболочкой a-SiC:H толщиной 30 нм без поляризатора (1) и с поляризатором в положениях X (2), Y (3). МР находится на канавке с V-образным профилем. На вставке — показаны положения поляризатора X и Y относительно канавки.

лил идентифицировать полярные индексы резонансных мод в экспериментальных спектрах фотолюминесценции микрорезонаторов с толщиной оболочки 15 и 30 нм. Проведение измерений поляризационных спектров ФЛ микрорезонатора на подложке с канавками, имеющими V-образный профиль, позволило экспериментально различить принадлежность всех наблюдаемых резонансных линий в спектре ФЛ к ТЕ- или ТМ-модам.

Показано, что даже тонкая оболочка (толщиной много меньше длины волны излучения) оказывает существенное влияние на спектральное положение МШГ. Изменение толщины оболочки микрорезонатора приводит к значительно большему изменению спектрального расстояния между ТЕ- и ТМ-модами, чем увеличение радиуса сферического микрорезонатора без оболочки на величину, равную толщине оболочки.

### **3 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗОНДА СКАНИРУЮЩЕЙ СИЛОВОЙ МИКРОСКОПИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛУДИСКОВОГО ЛАЗЕРА НА МОДАХ ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ**

#### **3.1 Введение**

Мощность выходного излучения это одна из основных характеристик полупроводникового лазера. Фотоприемник в комбинации с оптической системой, может обеспечить эффективный сбор и измерение расходящегося оптического пучка. Как правило, такая комбинация и используется для измерения выходной мощности излучения лазера. Измерения такого рода легко проводить в оптическом и ближнем инфракрасном диапазоне. Однако, с увеличением длины волны эффективность фотоприемников падает, создавать эффективные оптические системы становится значительно сложнее. Вследствие этого, в дальнем инфракрасном диапазоне, например, проводить измерения чрезвычайно сложно. Поэтому термические детекторы могут оказаться весьма полезными в данном диапазоне излучения. В качестве такого детектора удобно использовать обычный зонд для сканирующей ближнепольной микроскопии.

Как только кантилеверы атомно-силовой микроскопии (АСМ) начали использовать на практике в 80-е годы, выяснилось, что они чрезвычайно чувствительны к самым разнообразным внешним факторам: акустический шум, температура, влажность абсолютное давление т.п. [141]. Через некоторое время было понято, что эти нежелательные воздействия можно измерять с хорошей точностью и отделять одни от других, так что в 90-е была предложена целая серия разнообразных датчиков на основе микрокантилеверов [142, 143]. А при помощи точнейшего измерения резонансной частоты кантилевера стало возможным измерять целый спектр новых параметров как, например, масса адсорбированного на зонд вещества [144, 145].

Эти и всевозможные другие применения атомно-силовых микрокантилеверов (АСМ), а также их коммерческая доступность породили огромное

количество исследований применений в самых различных областях: в физике, в химии и даже биологии [146, 147]

Применения АСМ возможны в двух различных режимах статическом и динамическом. В статическом режиме измеряется изгиб кантилевера, вызванный изучаемыми воздействиями, а в динамическом режиме измеряются изменения амплитуды, фазы или собственной частоты вынужденных колебаний кантилевера. Эти колебания во втором режиме вызываются встроенным в силовой микроскоп пьезомеханическим элементом. При этом частота его колебаний, в большинстве случаев, устанавливается петлей обратной связи так, чтобы максимизировать амплитуду колебаний. И изгиб, и частота колебаний могут меняться под действием самых разнообразных факторов, которые мы рассмотрим ниже.

Центральной проблемой в обоих режимах является очень точное измерение отклонение кантилевера от его равновесного положения. В самых первых исследованиях применялся метод измерения туннельного тока. Сверху от свободного конца кантилевера устанавливалась иголка электрода, а затем на него и кантилевер подавалось небольшое напряжение. Измеряя туннельный ток, который чрезвычайно сильно зависел от расстояния между электродами, можно было с огромной точностью найти отклонение зонда [141]. Этот способ использовался как в статическом [148], так и в динамическом режимах [149]. Существуют и другие способы измерения отклонения: емкостный [150], пьезоэлектрический [151], пьезорезистивный [152], но самым распространенным и удобным является оптический метод [153].

Оптический метод измерения отклонения состоит в следующем: на кантилевер сверху под углом светит лазер. Его световой пучок, отражаясь от зонда, попадает на фотоприемник, чувствительный к положению пятна принимаемой интенсивности. Размещая фотоприемник достаточно далеко от кантилевера и устанавливая ось лазера все более параллельно к зонду, можно все сильнее увеличивать смещение светового пятна при малом угле отклонения АСМ. Этот простой 'рычажный' принцип и сделал оптический способ измерения таким популярным. Существуют вариации оптического способа, такие как интерферометрический: луч лазера попадает на световой

делитель, один из лучей попадает на фотоприемник сразу, а второй сперва отражается от зонда и только после этого попадает на тот же фотоприемник. Таким образом, разность хода лучей зависит от отклонения зонда. [154]

Первым очевидным применением кантилевера в статическом режиме являются измерения магнитостатических [155] и электростатических [156] полей. В статическом режиме АСМ работы не считая электромагнитных и гравитационных сил, единственной возможной причиной изгиба зонда остается неоднородное внутреннее напряжение. В подавляющем большинстве случаев источником таких напряжений является разница температурных расширений между основным материалом зонда (обычно кремний или нитрид кремния) и его металлического покрытия (алюминий или золото) [157].

Из-за колоссальной точности измерения изгиба, становится возможным обнаруживать тепловую энергию в фемто-Джоули. Таким образом, возможно измерять не только тепло от маломощных химических реакций, но даже тепло выделяющееся веществом, конденсирующимся на поверхности зонда [143]. Также в химии и биологии скорость осаждения летучего вещества можно измерять по изгибу из-за разницы напряжений с двух сторон зонда, вызванной осевшим веществом. Это позволяет даже измерять скорость осаждения в реальном времени [158, 159]

Самым интересным для нас приложением является измерение оптических электромагнитных полей как ближнего, так и дальнего. Из-за трудности применения полупроводниковых фотоприемников в инфракрасном диапазоне кантилеверы приносят огромную пользу.

Что касается дальнего поля излучения, то приборы ночного видения могут либо работать с дорогостоящими сверхохлажденными фотоприемниками для минимизации шума, либо могут применяется массивы из биматериальных зондов [160]. Каждый зонд работает в статическом режиме и выполняет роль пикселя камеры. ИК излучение, попадая на такой зонд, ведет к нагреву и деформации. Деформация каждого зонда регистрируется, и из них формируется изображение. Последний метод хотя и хуже по точности, зато намного более практичен.

То же самое касается излучения  $THz$  диапазона, который широко используется в охранных сканирующих системах [161] и медицине [162], поскольку такие волны могут свободно проходить через сухие, неметаллические материалы.

Указанный механизм регистрации типичен: биматериальный зонд обнаруживает дальнопольное излучение вследствие температурного нагрева и статической деформации из-за поглощенной энергии. Однако, существуют не применяющиеся на практике вариации этого принципа: если подавать на биматериальный АСМ переменное поле с частотой близкой к резонансной частоте АСМ, то вследствие периодического нагрева и остывания зонд начнет раскачиваться и осциллировать с заметной амплитудой [163]. Если зонд не биматериальный, то колебания в такой системе все равно будут иметь место, пусть и значительно менее сильные, потому что теперь существенными становятся силы оптического давления [164]. В редчайших случаях при определенном довольно низком давлении ( $\sim 10^{-4} \text{ Bar}$ ) больший, чем световое давление, вклад дает т.н. фотофорезная сила. Эта сила возникает в неоднородно нагретом теле, который находится в разреженном газе. При этом атомы газа при отражении от по-разному нагретых участков сами нагреваются по-разному и уносят с собой разные импульсы. Это и приводит к своеобразным неоднородностям давления, которые и называются фотофорезной силой [165].

Рассмотрим теперь применения зондов для регистрации ближнего оптического поля. В ближнем поле кроме силы светового давления появляется вторая прямая фотоиндуцированная сила - градиентная сила. Это средняя сила, действующая на центр масс диполя в быстроосциллирующем поле. Такая сила не равна нулю, если амплитуда колебаний поля неоднородна в пространстве, при этом диполь стремится в области с большей амплитудой. Градиентная сила, в отличие от оптического давления спадает очень быстро - как четвертая степень расстояния от поверхности лазера [166].

В принципе, силы ближнего поля, возникающие в типичных случаях могут быть измерены по изгибу зонда [167]. Однако другие силы, как например, молекулярные в контактном или полуконтактном режиме значительно

превосходят её, поэтому простым способом измерения произвести не удастся [168]. Но из-за того, что молекулярные силы спадают быстрее, при усреднении по расстоянию зонд-поверхность оптические силы становятся существенными. Именно поэтому для измерения прямых фотоиндуцированных сил обычно применяется динамический режим. При этом желательно сначала измерить карту поверхностных сил при выключенном поле, а затем вычесть из карты суммарных сил карту поверхностных [169].

В статическом же режиме обычно наблюдаются более сильный не прямой фототермальный эффект, при котором ближнее поле разогревает металлические части зонда [170–174]. Если наконечник металлический, то разогрев происходит непосредственно, если же кончик диэлектрический, то поле может туннелировать через него и распространяться в зонде до металлического покрытия сверху, разогревая его.

Также чрезвычайно важным в изучении фотоиндуцированных сил ближнего поля является то, что свет возбуждает колебания атомов диэлектрического образца, а не только зонда. И силы порождаемые этими диполями так же оказывают существенное влияние на зонд, их тоже необходимо учитывать [166]. Этот эффект может быть использован для более подробного 'химического' анализа поверхности [175]

При отсутствии электромагнитных и гравитационных сил возможны три механизма изменения частоты в динамическом режиме: из-за изменения коэффициента упругости зонда, вязкости окружающей среды и из-за налипнувших частиц, т.е. изменения массы. При этом поразительным результатом является то, что в современных нанокантилеверах теоретически может хватать точности для регистрации субатомных масс [176], на сегодняшний день есть эксперименты в другой микроструктуре - наномосте, в котором возможно регистрировать массу одного-единственного протона [177].

Это позволяет понять, почему одним из самых распространенных применений динамического режима является измерение концентрации вещества по количеству адсорбированной зондом массы. Одним из первых экспериментов на эту тему было измерение концентрации паров ртути [144].

При этом, в зависимости от покрытия кантилевера, для разных веществ наблюдается сильно различная скорость абсорбции и меняя покрытие можно проводить измерения для специфических органических или неорганических соединений. Здесь возможны самые разные технологические вариации с массивами зондов [144, 178–180]. Такие устройства могут различить даже слабейший запах взрывчатого вещества, недоступный восприятию даже специально обученной собаки [181]. Также возможно применение кантилевера для точного измерения уровня влажности. На поверхность зонда наносится гидрофильное, впитывающее воду вещество, масса которого меняется при изменении окружающей влажности [182].

Впрочем, использование кантилеверов в частности, наряду с другими микромеханическими структурами вообще, такими как 'микромост' позволяет, как было сказано выше, измерять самые разные параметры окружающей среды по изменениям характеристик колебаний этих микроструктур. Можно измерять ускорение [183], угловую скорость вращения [184], скорость химических реакций [185], плотность жидкости [186], вязкость жидкости [187], магнитные поля [188], давление окружающего газа [189] и т.д. Исчерпывающий обзор самых разных направлений в этой области приведен в статье [190].

Исторически первым экспериментом, в котором колеблющаяся микроструктура (микромост) облучалась THz излучением, была работа [191]. В ней излучение меняло силу механического напряжения внутри микромоста, что вело к изменению его собственной частоты колебаний. Измерение частоты происходило при помощи емкостного метода, а возбуждение колебаний производилось электрическими силами.

С тех пор исследование ИК детекторов на резонансных структурах шло в направлении усовершенствования концепции микромоста [192–195], с небольшими модификациями [196, 197]. При этом основанные на колеблющемся микромосте ИК детекторы сегодня превосходят по точности аналоги на основе биматериальных АСМ [195].

Биматериальные микрокантилеверы для атомно-силового микроскопа успешно использовались для детектирования инфракрасного излучения [198].

Интенсивность поглощения излучения определялась по термомеханической деформации зонда. Для увеличения чувствительности таких кантилеверов использовались специальные формы и сильно поглощающие покрытия. [199–201] Оптимизированные зонды показывали высокую чувствительность в инфракрасном и даже терагерцовом диапазонах [202]. Недавно был продемонстрирован другой подобный метод, основанный на измерении сдвига резонансной частоты кантилевера, вызванного нагревом.[203] Принципиальной причиной этого эффекта светоиндуцированного сдвига резонансной частоты (сдвига частоты) является температурная зависимость модуля Юнга материала, из которого изготовлен зонд. Метод измерения, основанный на этом эффекте, показывает высокую чувствительность и, при необходимости, высокое пространственное разрешение. Большим преимуществом данного метода является возможность использования доступных на рынке зондов и силовых микроскопов без каких-либо дополнительных модификаций. Исследования [203] имели целью построить картину ближнего поля полупроводникового лазера.

В данной главе диссертации речь пойдет об эксперименте, в котором с помощью зонда сканирующей микроскопии был исследован работающий полупроводниковый лазер. Был теоретически проанализирован сдвиг резонансной частоты колебаний зонда, обусловленный его нагревом из-за лазерного излучения. Наблюдаемый сдвиг частоты пропорционален количеству поглощенной энергии излучения. Будет показано, что периодическая зависимость поглощаемой мощности от расстояния между зондом и поверхностью лазера вызвана интерференцией между выходным излучением и излучением, отраженным от поверхности зонда. Зонд представляет собой прозрачное тело, покрытое сверху металлической пленкой. Поглощение света происходит, в основном, внутри металлической пленки, однако многократные отражения внутри прозрачного тела существенно меняют количество поглощенной энергии. Изучалось взаимодействие инфракрасного излучения с зондами разнообразной формы. Мы концентрируемся на исследовании суммарной интенсивности излучения.



### 3.2 Изучаемый эксперимент и его методика

В этом подразделе, как и в аналогичном подразделе предыдущей главы, кратко опишем эксперимент, проведенный соавторами и приведем его основные результаты.

Измерения проводились с помощью микроскопа 'EnviroScope' фирмы Veeco в условиях вакуума ( $p = 10^{-6}$  mBar). Исследовались доступные зонды, разных форм и из разных материалов. Некоторые зонды имели металлическое покрытие на нижней стороне. Были исследованы зонды:

- 1) Кремниевый зонд 'Nanosensors' PPP-FMR без покрытия снизу
- 2) Кремниевый 'Nanosensors' PPP-FMAu с золотым покрытием снизу.
- 3) Нитрид-кремниевый 'Bruker' ORC-8 без покрытия.
- 4) Нитрид-кремниевый 'Bruker' NPG-10 с золотым нижним покрытием
- 5) Кремниевый 'Nanosensors' АТЕС-FM со специальной формой острия.

Из-за принципа работы АС микроскопа, все зонды имеют металлизированную верхнюю поверхность. Выбор зондов позволил изучить эффективность метода в зависимости от разных форм и материалов зонда. Нужно отметить, что эффект периодической зависимости сдвига от расстояния между зондом и поверхностью лазера наблюдался для всех зондов. Для изучения механизма влияния излучения на зонд использовался простой *GaSb* полосковый лазерный диод, излучающий на длине волны 2.1 мкм с шириной полоска 8 микрон. Активный слой толщиной 0.8 мкм содержал две *GaInSbAs/GaAlSbAs* квантовые ямы (состав слоёв лазера:  $n-GaSb/n-GaAl$  0.9  $AsSb/GaAl$  0.35  $AsSb/p-GaAl$  0.9  $AsSb/p-GaSb$ ). Структура была выращена методом молекулярно-лучевой эпитаксии. Детальное описание лазера можно найти в [204].

Рис. 10 показывает геометрию эксперимента и картины измеренного сдвига частоты, полученного сканированием поверхности лазера двумя зондами №1 *Si* (Рис. 10 b) и №3 *Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>* (Рис. 10 c) эти измерения были проведены при расстоянии поверхность-острие 2 мкм, что позволяло сканировать большие площади поверхности без риска повредить зонд. Поскольку излу-

чающая область лазера намного меньше, чем размеры зонда, на картинке хорошо видна форма зонда. Излучающая область обозначена штриховым овалом на Рис. 10. Нужно отметить, что легированный кремний поглощает излучение длиной волны 2.1 мкм, в то время как нитрид кремния прозрачен на данной длине волны. По этой причине можно однозначно отнести нагрев зонда к поглощению излучения непосредственно в металлическом покрытии. Для кремниевого зонда часть поглощения происходит в самом зонде и полезный сигнал увеличивается, когда толстая пирамида находится над излучающей областью. Примечательным фактом является наличие

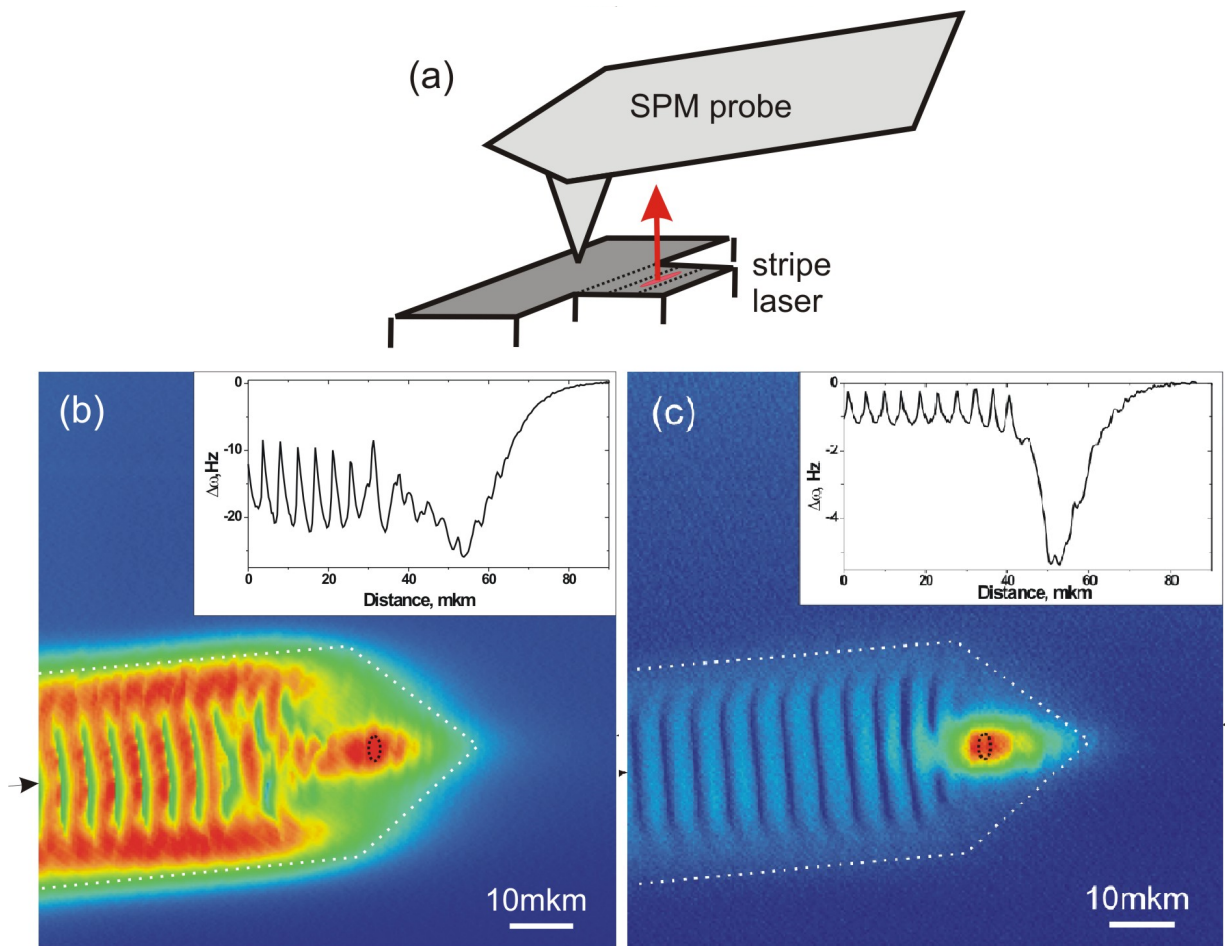


Рисунок 10 – а) Геометрия эксперимента: зонд сканирующий поверхность лазера. б) Экспериментальная карта сдвига частоты для зонда №1. в) То же для зонда №3.

периодических полос в картине сигнала и, следовательно, в количестве поглощаемой в единицу времени энергии (Рис. 10 б,в). Серии полос проходят перпендикулярно к продольной линии зонда, что ясно видно на обеих

картинках. Расстояние между полосами примерно 4.4 мкм (см. графики, помещенные на рисунках). Этот эффект имеет место для всех зондов. Периодичность полос почти не зависит ни от формы зонда, ни от материала, ни от покрытия 1) $\Delta_1 = 4.4$  мкм 2) $\Delta_2 = 4.4$  мкм 3) $\Delta_3 = 4.1$  мкм 4) $\Delta_4 = 4.8$  мкм 5) $\Delta_5 = 4.4$  мкм, индексы здесь соответствуют номерам зондов, данным выше.

Другое важное наблюдение состоит в том, что положение полос зависит от расстояния острие - поверхность (ось  $z$ ). Эта особенность продемонстрирована на Рис. 11, на котором показаны развертки сдвига частоты для трех различных расстояний по  $z$ : 20 нм, 600 нм и 1100 нм. В данном случае измерения проводились для  $Si_3N_4 + Au$  (Зонд 4). Рис. 10 показывает сдвиг серии полос на один период при подъеме острия на расстояние 1.1 мкм, что примерно равно половине длины волны излучения. Это указывает на интерференционную природу данного явления, поскольку максимумы поглощения возникают при сдвиге зеркальной поверхности на целое число полуволн в направлении хода лучей  $z = n \lambda/2$ .

Периодическая структура линий поперек кантилевера имеет ту же интерференционную природу. Дело в том, что кантилевер наклонен по отношению к поверхности примерно на  $\theta = 12 - 14^\circ$ , а периодичность вдоль кантилевера  $\Delta$  соотносится с длиной волны  $\lambda$  по формуле

$$\lambda/2 = \Delta \cdot \text{tg}(\theta)$$

, что дает в нашем случае  $\Delta \approx 4.5$  мкм, что хорошо соответствует экспериментальным расстояниям. Следует отметить, что углы наклона для разных кантилеверов несколько отличаются, что приводит к различию в измеряемых величинах  $\Delta_i$ .

Экспериментальные данные о максимальном сдвиге частоты для различных зондов указаны в Табл. 1. Сдвиг частоты намного меньше для зондов, имеющих нижнее металлическое покрытие. В этом случае золотое покрытие уменьшает сигнал в 20 раз, что соответствует отражению 95% падающего излучения. Интересно, что наблюдался более сильный сигнал в

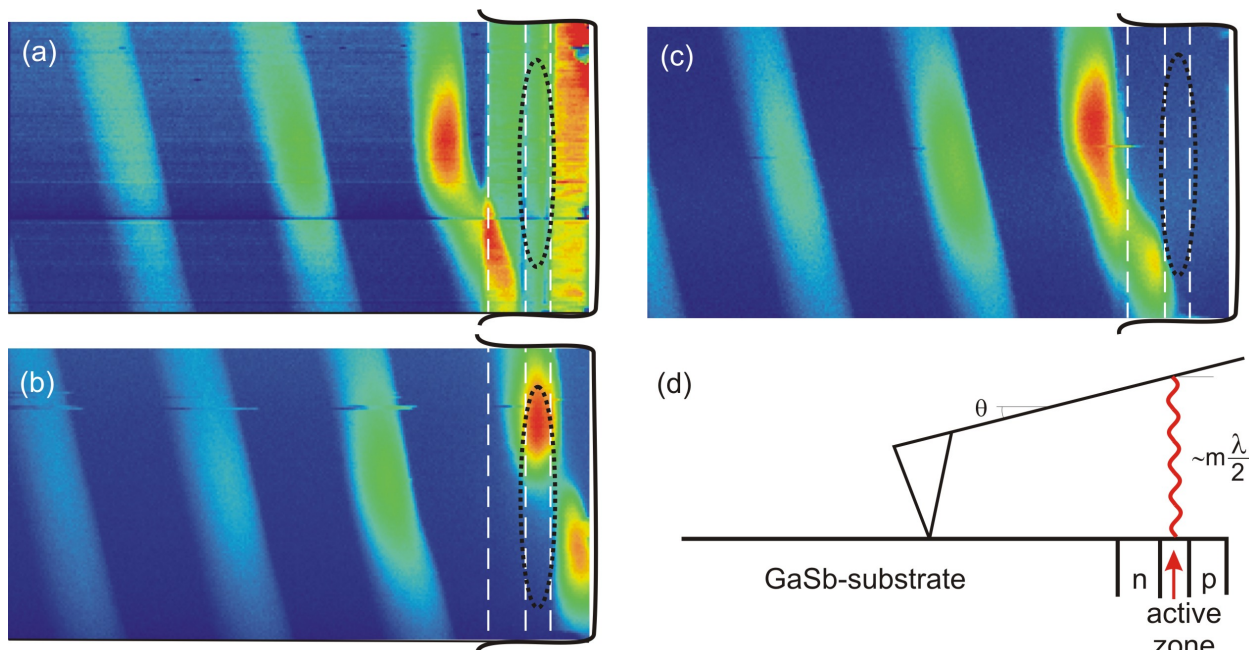


Рисунок 11 – а) Карта сдвига частоты при расстоянии между острием зонда 20 нм б) Расстояние 600 нм с) Расстояние 1100 нм d) Схема происходящей интерференции между зондом и поверхностью лазера.

зонде  $Si_3N_4$ , прозрачном для излучения, чем в зонде Si, поглощающем его. Это связано с другими, указанными ниже параметрами, влияющими на сигнал, в особенности с теплопроводностью.

### 3.3 Теория наблюдаемого эффекта

Для того, чтобы выделить основные факторы, влияющие на чувствительность метода, мы провели численное моделирование. Было учтено как распространение света, его интерференция и поглощение, так и теплопроводность зонда и его металлического покрытия. Моделируемая структура изображена на Рис. 12а. Важно отметить, что в металлическое покрытие, имеющее толщину всего 30 нм, данное оптическое излучение проникает на глубину лишь 5 нм (скин-слой), поэтому это покрытие при моделировании можно заменить на полубесконечную среду. Рассчитываемая геометрия изображена на Рис. 12б, в модели учитывался наклон, принятый  $\theta = 14^\circ$ . Оптические расчеты, описанные ниже, показали, что основное поглощение

Кантилевер	Si, 1)	Si + Au coating, 2)	Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> , 3)
Расстояние между интерференционными полосами $\Delta$ , $\mu\text{m}$	4.4	4.4	4.1
Экспериментальное значение ССРЧ зонда в интерференционном максимуме, Hz	22	1.25	45
Вычисленный коэффициент поглощения в максимуме, k	0.2	0.03	0.14
Вычисленный средний нагрев $\Delta T_{av}$ зонда в максимуме, K	2	0.4	10
Теоретическое значение ССРЧ зонда (в интерференционном максимуме), Hz	24	4	80

Таблица 3 – Сравнение теоретического и экспериментального значений светоиндуцированного сдвига резонансной частоты (ССРЧ) для различных зондов. Учен наклон кантилевера. Без его учета теоретические величины будут завышены в несколько раз.

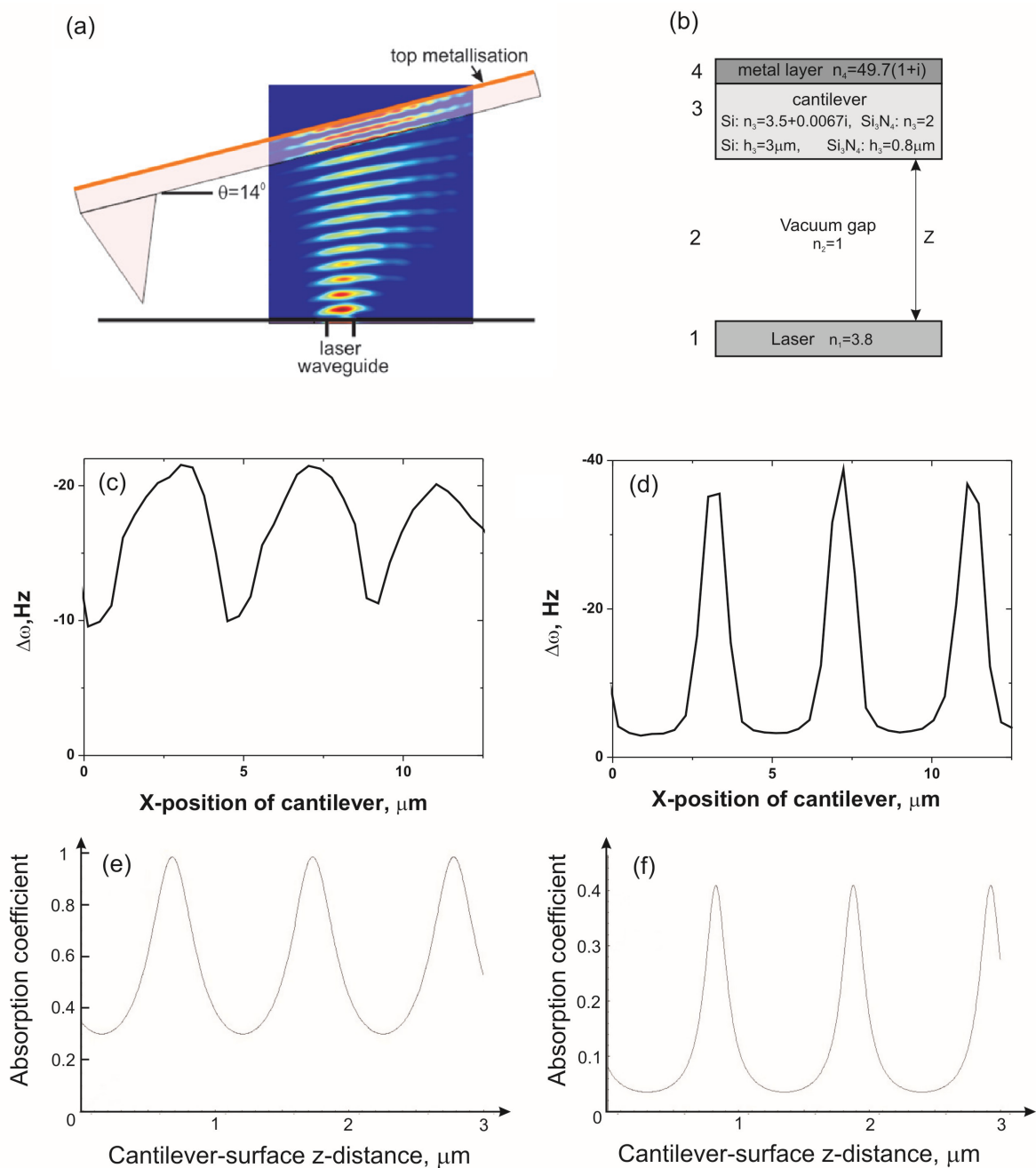


Рисунок 12 – а) Распределение интенсивности света между кантилевером и поверхностью при интерференции. б) Схема, на которой приведены оптические и геометрические параметры структуры 'поверхность лазера - зазор - балка кантилевера'. в) Теоретическая зависимость поглощения мощности от расстояния между зондом и поверхностью лазера для Si кантилевера. Наклон зонда не учтен. д) То же для  $Si_3N_4$  зонда. е) Аналогичная экспериментальная кривая для Si кантилевера. ф) То же для  $Si_3N_4$  зонда.

происходит в металлическом покрытии. Это единственный механизм поглощения, возможный для нитрид-кремниевого зонда, полностью прозрачного на длине волны 2.1 мкм. В кремниевом зонде поглощение происходит и в самом зонде, хотя основной вклад вносит металлическая пленка. Множественные отражения в структуре, созданной металлическим покрытием, нижней прозрачной гранью зонда и прозрачной гранью лазера, оказывают сильное влияние на количество поглощенной в покрытии энергии.

Зависимости поглощенной энергии от расстояния между поверхностью лазера и поверхностью зонда показаны на Рис. 12с и 12d для  $Si$  и  $Si_3N_4$  зондов, соответственно. По оси абсцисс отложен сдвиг вдоль наклоненного кантилевера (ось  $x$ ). Экспериментальные максимумы сигналов сдвига частоты приведены в Табл. 3.

Численные кривые поглощения, соответствующие сдвигу частоты, приведены на Рис. 12 e,f. По оси абсцисс отложено расстояние от поверхности лазера до нижней грани зонда (ось  $z$ ), пропорциональное сдвигу (ось  $x$ ), как указано выше. Кривые получены без учета наклона кантилевера, чем и обусловлено их отличие от экспериментальных. Более сложной теоретической задачей является получение поглощения с учетом наклона кантилевера. Результаты решения этой задачи занесены в таблицу 3.

### 3.4 Формула для оценки чувствительности зондов и оптические расчеты

Для того, чтобы определить зависимость сдвига частоты от количества поглощенной энергии, необходимо решить задачу распространения тепла, нагревающего зонд и меняющего его модуль Юнга. Тепло, поглощаемое на конце кантилевера, распространяется в сторону его крепления и далее уходит в массивный корпус силового микроскопа. Поэтому мы примем температуру точки крепления равной комнатной. С хорошей точностью можно считать поток тепла вдоль зонда однородным по оси  $x$  и, следовательно, температуру можно принять меняющейся линейно от  $T_{max}$  на кончике до

комнатной  $T_0$ , что приводит к формуле

$$\frac{\chi(T_{max} - T_0)}{L} = \frac{P k}{S}, \quad (18)$$

где  $P$  - мощность лазерного излучения,  $k$  - часть мощности, поглощаемая в зонде,  $S$  - площадь поперечного сечения кантилевера, перпендикулярного оси  $X$ ,  $T_{max}$  - температура на кончике зонда, куда и падает свет,  $T_0$  - комнатная температура,  $L$  - длина кантилевера и  $\chi$  - теплопроводность зонда.

Вычисления показывают, что распространение тепла происходит несколько по-разному в  $Si$  и  $Si_3N_4$  зондах из-за того, что существенная часть мощности может распространяться в тонком металлическом покрытии. Его теплопроводность чрезвычайно высока  $\chi_{Au} = 320 \frac{W}{K m}$ , но чрезвычайно малая толщина этого покрытия по сравнению с толщиной зонда ведет к тому, что почти все тепло распространяется в теле самого зонда, имеющего теплопроводность  $\chi_{Si} = 130 \frac{W}{K m}$ .

С другой стороны, влияние металлического покрытия на теплопроводность становится существенным для  $Si_3N_4$  зонда, имеющего очень малую теплопроводность  $\chi_{Si_3N_4} = 30 \frac{W}{K m}$ . Если учесть влияние металлической пленки, то можно считать эффективную теплопроводность зонда  $\chi_{Si_3N_4}^{eff} = 50 \frac{W}{K m}$ , именно её мы и будем использовать в расчетах. Повышение средней температуры зонда  $\Delta T_{av} = (T_{max} - T_0)/2$  может быть найдено из формулы (18). Примерная мощность лазерного излучения  $P = 1$  мВт.

Сдвиг резонансной частоты, вызванный зависимостью модуля Юнга от средней температуры равен

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2} \beta \Delta T_{av}, \quad (19)$$

где  $\beta$  - коэффициент температурной зависимости модуля Юнга, известный для материалов кантилеверов:  $\beta_{Si} = -0.6 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ ,  $\beta_{Si_3N_4} = -0.4 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ . Вычисленные таким образом сдвиги частот приведены в таблице 1.

Из формул (18) и (19) можно получить хорошую оценочную формулу



для чувствительности данного кантилевера.

$$R = \frac{\Delta f}{P \cdot f} = \frac{\beta L}{4 \chi S} k \quad (20)$$

Для большинства зондов при интерференционном максимуме поглощения  $k$  находится в районе 0.1 – 1. Эта формула очень удобна для выбора оптимально подходящего зонда с максимальной чувствительностью сдвига частоты. Так, из этой формулы видно, что чрезвычайно высокая чувствительность  $Si_3N_4$  зонда связана с его низкой теплопроводностью и малой площадью поперечного сечения, что и приводит к сильному нагреву и, как следствие, к сильному сдвигу частоты.

Для рассмотренных нами оптико-термальных измерений оптимальной дистанцией между кончиком зонда и поверхностью является величина примерно 1мкм, что соответствует расстоянию между нижней гранью зонда и поверхностью примерно в 10мкм. При таких условиях, с одной стороны, излучающую область легко обнаружить без риска испортить зонд о поверхность, а с другой, зонд поглотит существенную часть излучения. Интерференционные эффекты, рассмотренные в нашем обсуждении, должны быть приняты во внимание в случае, когда расстояние между зондом и лазером сравнимо с длиной волны. Это связано с тем, что для наклоненного кантилевера многократно отраженные лучи сильно смещаются в сторону и перестают интерферировать. В дальнем инфракрасном диапазоне интерференция не должна наблюдаться из-за чрезвычайно сильного поглощения материалами зонда данного участка спектра. Это же делает метод чувствительным в данном диапазоне. Стоит отметить, что рассмотренные интерференционные эффекты нужно принимать во внимание и для упомянутого выше метода термо-механической деформации микронзондов. В этом случае интерпретация результатов затруднительна из-за зависимости расстояния зонд-лазер от изгиба т.е. от интенсивности поглощенного излучения.

### 3.5 Заключение

Мы экспериментально рассмотрели метод измерения интенсивности излучения полупроводникового лазера среднего инфракрасного диапазона при помощи зонда сканирующего силового микроскопа. Метод основан на светоиндуцированном сдвиге резонансной частоты колебаний зонда, обусловленный нагревом. А именно, сдвиг частоты вызывается температурной зависимостью модуля Юнга материала зонда. Сдвиг частоты пропорционален поглощенному излучению и может быть использован не только для измерения суммарной выходной интенсивности, но и для изучения ближнего поля лазера. Была обнаружена периодическая зависимость сдвига частоты от расстояния зонд-поверхность лазера обусловленная интерференцией света. Основное поглощение света происходит внутри металлической пленки, однако, многократные отражения внутри зонда и между зондом и лазером могут существенно увеличивать количество поглощенной энергии. Это позволяет увеличить количество поглощенной энергии просто помещая зонд на расстояния, равные целому числу полуволен, при которых поле в зонде максимально и, значит, поглощение максимально. Эффект сдвига частоты был изучен для нескольких зондов разных форм и из разных материалов. Была получена оценочная формула, связывающая чувствительность метода с различными параметра зонда такими, как его размеры и теплопроводность.

## **4 ЭФФЕКТ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ВСТРЕЧНЫХ МОД В КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРЕ, ВЫЗВАННЫЙ ВНЕШНЕЙ ОПТИЧЕСКОЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ С ЗАДЕРЖКОЙ**

### 4.1 Введение

Кольцевые лазеры изучались и изучаются чрезвычайно активно. [205–209]. Эффект автопереключения встречных мод (при отсутствии внешней

обратной связи) и другие динамические эффекты в кольцевых лазерах были предсказаны теоретически для двухуровневой активной среды [34]. Эффект автопереключения наблюдался экспериментально в газовых лазерах [210], в лазерах на красителях [211], в твердотельных Nd-YAG лазерах [212] и т.д. Отстройка частоты между центром линии усиления активной среды и собственной частотой встречных мод резонатора играет важную роль в эффекте автопереключений. Для достаточно большой отстройки частоты однонаправленное решение (при котором не равна нулю амплитуда только одной из мод) теряет стабильность и замещается режимом регулярных автопереключений [34]. Период этих автопереключений сильно зависит от различных параметров кольцевого лазера и может меняться в широких пределах.

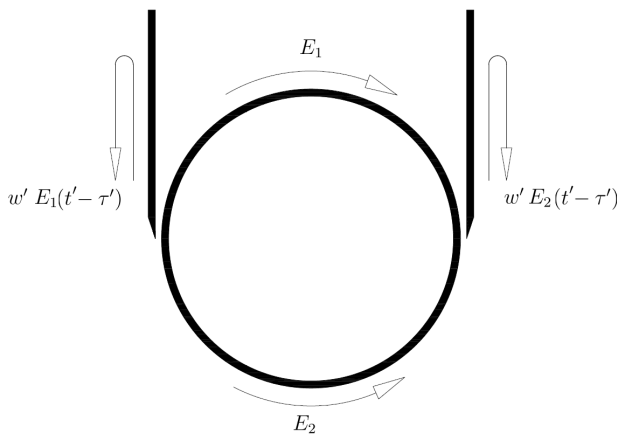


Рисунок 13 – Схема резонатора с перекрестной задержанной внешней обратной связью. Часть мощности  $w$  из одной моды распространяется в течение времени  $\tau$  и возвращается в противоположную моду. Когда  $w$  достаточно велико, эта внешняя ОС способна вызвать переключения при их отсутствии. Такие вынужденные переключения имеют период почти равный  $2\tau$ .

Цель этой главы состоит в том, чтобы изучить модификацию резонатора, которая позволяет добиться эффекта переключений мод даже в том случае, когда отстройка частоты слишком мала. Мы будем называть такие вызванные переключения 'эффектом вынужденного переключения мод', в отличие от эффекта автопереключений. Для их получения необходимо ввести перекрестную внешнюю оптическую обратную связь с задержкой (задержанную связь), как показано на Рис. 13. При этом период переключений будет примерно равен удвоенному времени задержки, а сила задержанной связи может быть весьма малой.

В эффекте переключений существенны только две моды, соответствующие данной частоте резонатора  $\omega_c$ : 'плюс-' и 'минус-мода', распространяющиеся, соответственно по часовой стрелке и против часовой стрелки, этими

модами всегда и ограничиваются. Рассмотрим задержанную связь: часть мощности плюс-моды (минус-моды) покидает резонатор, распространяется вне емкости в течение времени  $\tau'$  и возвращается в резонатор, в противоположную минус моду (плюс-моду).

Обратная связь с задержкой чрезвычайно интересна с математической точки зрения [213, 214]. Для полупроводникового лазера первое рассмотрение задержанной оптической обратной связи было произведено в [215]. Уравнения для подобного лазера были написаны с использованием уравнений для обычного полупроводникового кольцевого лазера [216]. При этом в [215] вторая пространственная гармоника инверсии заселенности предполагалась малой и безинерционной по отношению к полю, что связано с высокой скоростью диффузии носителей заряда. Но что важнее всего, задержка считалась малой, в противоположность нашему случаю. В результате были получены интересные динамические эффекты, но не эффект вынужденного переключения мод.

Эффект, очень близкий по своей природе к вынужденному переключению мод, экспериментально наблюдался в полупроводниковом лазере с асимметричной задержанной обратной связью [217]. При этом в линии ОС стоял оптический усилитель, а возвращенная мощность не измерялась. В этом эксперименте оказалось, что оптический шум (усилителя в том числе) играет центральную роль в эффекте переключений. Эти особенности отличают эксперимент, рассмотренный в [217], от теории приведенной ниже, но эффект переключений, по всей видимости, имеет ту же динамическую природу. Для того, чтобы качественно объяснить эффект переключений, авторы [217] использовали уравнения для полупроводникового лазера и дополнительные слагаемые, описывающие одноплечевую обратную связь и оптический шум.

В данной главе уравнения для кольцевого лазера с задержанной связью получены из первых принципов с учетом второй пространственной гармоники. Поэтому уравнения применимы к широкому классу кольцевых лазеров таких, как полупроводниковые, на красителях, газовые, лазеры на квантовых точках и т.д. Как будет показано ниже, при высокой скорости диффу-

зии носителей заряда (полупроводниковый лазер) уравнения практически совпадают с приведенными в [215] и становятся аналогичными приведенным в [217] (с указанными выше отличиями)

Экспериментально рассматриваемый нами эффект вынужденного переключения в кольцевом лазере с перекрестной задержанной обратной связью был подтвержден в работе [218] для полупроводникового лазера.

Вообще говоря, оптическая связь с задержкой в лазерах различных типов была исследована как теоретически, так и экспериментально. Особенно многочисленны эксперименты в полупроводниковых лазерах из-за их популярности, а так же из-за их относительно большой чувствительности к обратным отражениям вследствие очень малого времени жизни фотона. Однако, аналогичные эффекты можно обнаружить и в иных типах лазера.

Простейшей и при этом наиболее успешной теоретической моделью лазера с задержанной обратной связью является модель Кобаяши-Лэнга: односторонний лазер типа В с внесенной задержанной обратной связью [219, 220]. Сравнительно давно было понято, что даже слабая задержанная связь может привести к существенным неустойчивостям и изменениям характеристик излучения. Одной из первых экспериментальных работ, в которой это было показано, является [221]. Основным характерным временем в лазере типа В является период релаксационных колебаний между световым полем и электроном  $\tau_{osc}$ , оно характеризуется соотношением между временем жизни электрона в возбужденном состоянии  $\tau_e$  и временем жизни фотона в резонаторе  $\tau_{ph}$  и равно приблизительно их среднему геометрическому  $\tau_{osc} \sim \sqrt{\tau_e \tau_{ph}}$ . Эти колебания медленно затухают с характерным временем  $\tau_e$ . В этой работе [221] и было экспериментально показано, что при внесении задержанной связи эти колебания могут не затухать, а напротив, усиливаться и существовать неограниченно долго. При этом сильнее всего эффект выражен тогда, когда период колебаний равен времени задержки, т.е.  $\tau_{osc} \sim \tau_{del}$ .

Другой эффект наблюдался в работе [222], где экспериментально были обнаружены пульсации с периодом  $\tau_{del}$  и/или пульсации с очень низкой частотой 3-30 МГц, поэтому эти последние пульсации были названы

низкочастотными флуктуациями. При этом наблюдался нерегулярный, медленный рост интенсивности излучения, а затем внезапный срыв к минимальному значению, после которого процесс приблизительно повторялся. Природа низкочастотных флуктуаций чрезвычайно сложна и интересна и будет рассмотрена ниже. Также в этой работе были найдены существенные нелинейности в зависимости выходного излучения от тока накачки.

В первых исследованиях задержанная связь всегда рассматривалась как паразитное явление, приводящее к нежелательным последствиям. Например, экспериментально было показано [223], что если вернуть в полупроводниковый лазер всего лишь  $10^{-4}$  его выходной мощности, то интенсивность шума увеличится в  $10^6$  раз! Частично решить эту проблему возможно прямой модуляцией накачки лазера [224, 225], эту же проблему может решить и качественный оптический изолятор. На практике эта проблема существенна как для полупроводниковых лазеров, так и для лазеров на квантовых точках [226].

Было показано [227], что нестабильность излучения может сопровождаться катастрофической потерей когерентности излучения (коллапс когерентности). При этом длина когерентности может уменьшаться в  $10^3$  раз. Самыми существенными при этом оказались два фактора: конечность времени распространения от лазера до зеркала и обратно и нелинейность взаимодействия активной среды и света.

Вместе с тем были работы, демонстрирующие, что задержанная связь не всегда вредит, так, в работе [228] было обнаружено, что наряду с пульсациями при некоторых параметрах лазера и связи, возможна стабилизация частоты или увеличение когерентности.

Начиная с 80-х годов, лазеры с задержанной связью становятся экспериментальной моделью для применения общей теории систем с задержанной связью. Лазерная динамика, будучи существенно нелинейной, стала полноправной частью нелинейной физики вообще. Лазеры прекрасно подходят для изучения таких областей как низкоразмерный и высокоразмерный динамический хаос и пути его возникновения, пространственно-временная динамика, локальные и глобальные бифуркации, многомодовая

динамика (взаимодействие связанных нелинейных осцилляторов), контроль хаоса, синхронизация хаоса, стохастические резонансные эффекты и т.п. [229, 230].

На примере лазеров с задержанной связью изучалась, в том числе синхронизация с нулевым запаздыванием, впервые найденная в теории нейросетей [231, 232]. Было показано, что этот эффект может играть большую роль в механизмах запоминания информации [233]. Есть работы, посвященные сетям с задержкой, демонстрирующие аналогию с теорией связанных нелинейных осцилляторов [234].

В 90-х годах была высказана идея, как два твердотельных лазера, связанных с задержкой, можно использовать в криптографии [235], опираясь на эффект синхронизации динамического хаоса. Затем была доказана осуществимость этой идеи [236, 237], а еще через некоторое время в серии опытов были показаны удобство, надежность и практическая применимость этих идей [238].

Теперь подробнее рассмотрим эффекты, возникающие в одномодовом лазере с задержанной связью. Нужно различать два случая: 'малая задержка'  $\tau_{del} \leq \tau_{osc}$  и 'большая задержка'  $\tau_{del} \gg \tau_{osc}$ . Поведение в обоих случаях крайне сильно различается. Следует специально отметить, что даже в случае малой задержки, её наличие и конечность существенны. Если говорить о паразитной задержанной связи, то на практике встречаются оба случая, большая задержка чаще всего возникает в открытых системах или системах с оптическими волноводами, а короткая задержка встречается в интегральных оптических схемах.

Теперь отдельно приведем исследования, касающиеся больших времен задержки  $\tau_{del} \gg \tau_{osc}$ . Экспериментально была проведена глобальная классификация эффектов для одномодового лазера с задержанной связью [239]. В ней использовался полупроводниковый лазер с вертикальным резонатором на  $1.5 \mu m$ . Длина внешней линии задержки варьировалась в пределах  $20 cm \div 4 m$ , а величина возвращаемой мощности в пределах  $-80 dB \div -8 dB$ . Выяснилось, что лазер может работать в пяти различных режимах.

Режим I наблюдался для самых малых величин силы связи  $\sim -80 dB$ . В

зависимости от фазы возвращаемого поля  $\phi_{del}$  ширина линии когерентности либо сужалась, либо расширялась.

В режиме II, при силе связи, зависящей от  $\tau_{del}$ , ширина линии возрастала и появлялось 'переключение мод'. Лазер оставался одномодовым, но частота этой моды менялась прыжками в небольших пределах, так что вместо одной линии спектра появлялись две сложные линии. Положение этих линий зависело от  $\tau_{del}$  и силы связи.

В узком по параметру силы связи режиме III, появляющемуся в пределах  $-45dB \div -39dB$ , прыжки мод исчезали и лазер генерировал на одной узкой линии при всех  $\phi_{del}$ .

Далее, в режиме IV возникали две боковые линии, которые увеличивались по мере роста силы связи, а затем внезапно сливались с основной, так что происходил упомянутый выше коллапс когерентности и ширина линии становилась  $50GHz$  вместо  $250MHz$  без связи. Причем этот режим не зависит от фазы  $\phi_{del}$ .

Наконец, в режиме V, при очень сильной связи  $-10dB$  наблюдалась генерация на одной узкой линии вне зависимости от  $\phi_{del}$ . При этом лазер с задержанной связью становился как бы одним лазером с длинным резонатором, но узкой активной областью. Соответственно, частотой генерации становилась одна из частот длинного резонатора.

Перечисленные режимы могут отличаться как в других полупроводниковых лазерах, так и в лазерах других типов, но дают общее представление о том, к чему может приводить появление задержанной связи различной силы при большом времени задержки.

Важнейшим для понимания приведенных явлений является анализ структуры стационарных точек модели Кобаяши-Лэнга, проведенный в [240]. Так, при отсутствии задержанной связи имеются всего две точки - неустойчивая тривиальная точка отсутствия света и устойчивая точка лазерной генерации. Введение задержанной связи приводит к появлению большого количества новых устойчивых решений  $\alpha_i e^{i\omega_i t}$  с постоянной частотой колебания  $\omega_i$ , амплитудой  $\alpha_i$  и постоянным значением инверсии  $n_i$ . При этом важным оказывается параметр  $Z = w \tau_{del}$ , где  $w$  - сила задержанной связи,



а  $\tau_{del}$  - время задержки. Чем больше этот параметр, тем больше появляется упомянутых мод, так при  $Z < 1$  дополнительных мод нет, они появляются примерно при  $Z > 1$ , а в случае  $Z \gg 1$  их количество приблизительно [241] равно  $Z/\pi$ .

Устойчивость этих точек при слабой задержанной связи и возникновение неустойчивостей были исследованы экспериментально [242, 243] и теоретически [244, 245]. При этом были исследованы бифуркации стационарных точек и пути возникновения динамического хаоса. Оказалось, в частности, что чем сильнее асимметрия линии усиления лазера, тем он чувствительнее к задержанной связи, что наблюдается в полупроводниковых лазерах.

При дальнейшем теоретическом исследовании устойчивости было показано [246], что мода объединенного резонатора с наибольшим коэффициентом усиления всегда устойчива, однако не всегда достижима, поскольку возможно существование других аттракторов. Исчерпывающий обзор проблем устойчивости решений и появления шумов в случае слабой задержанной связи можно найти в [247].

Далее, для задержанной связи средней силы преобладают режимы низкочастотных флуктуаций и коллапс когерентности. После открытия низкочастотных флуктуаций [222] природа этого сложного явления изучалась довольно долго. Так, при численном моделировании стало ясно, что эти флуктуации можно корректно объяснить лишь при добавлении к детерминированным уравнениям Кобаяши-Лэнга случайного шума [248]. Шум моделировался короткими случайными всплесками. Только в этом случае появляется характерная картина нерегулярного роста интенсивности со срывами. При этом, если шум в определенном момент времени отключить, то это явление пропадает.

Значительно позже было понято [249], что механизм явления представляет собой хаотичное блуждание системы между стационарными точками за счет шума. Однако, это блуждание не полностью одинаково во всех направлениях, что, в среднем, ведет систему к точке с наибольшим усилением и интенсивностью. Срыв интенсивности происходит из-за существования

идущей от этой точки траектории, ведущей к основной моде с меньшей интенсивностью. После срыва картина повторяется.

В рамках модели Кобаяши-Лэнга, механизм появления коллапса когерентности аналогичен, с той лишь разницей, что для сильной связи (при которой он возникает) стационарных точек гораздо больше, они находятся ближе друг к другу и к основной частоте генерации, а срыв происходит гораздо раньше. Поэтому в эксперименте наблюдать пульсации становится почти невозможным, но ширина линии спектра значительно увеличивается [250]

Возвращаясь к применимости модели Кобаяши-Лэнга нужно отметить, что проводилась серия экспериментов [251, 252], в которых измерялись не только интенсивность света, но и динамика носителей заряда. Эти эксперименты находились в хорошем согласии с моделью.

Что касается практических применений и устойчивости лазеров к паразитной задержанной связи, то большие надежды в плане отсутствия чувствительности возлагались на лазеры с вертикальным резонатором из-за из малопрозрачных зеркал. Однако, все нестабильности, описанные выше, были найдены и в этом случае [253–256]. И хотя ожидалось, что этот тип лазера проявит меньшую чувствительность, оказалось, что из-за сравнимого времени жизни фотона  $\tau_p$ , его чувствительность к задержанной связи примерно такая же, как у обычного полупроводникового лазера.

В отношении устойчивости к паразитной задержанной связи также были надежды на лазер на квантовых точках. Особенно привлекательным выглядел факт малой асимметрии полосы усиления. Но оказалось, что результаты сильно разнятся от метода изготовления лазера и условий эксплуатации [257]. Это объясняется наличием побочного слоя вокруг каждой квантовой точки. Из-за этого соответствующие нестабильности были найдены и в лазере на квантовых точках [226]. Однако, этот лазер действительно проявляет меньшую чувствительность к задержанной связи. Лазер на квантовых штрихах находится между лазером на квантовых ямах и на квантовых точках и для него наблюдались эффекты коллапса когерентности и низкочастотных флуктуаций [258].

Изучались даже появившиеся относительно недавно микролазеры на квантовых точках [259]. Лазер генерировал на крайне малых мощностях в единицы  $nW$ , близких к квантовом пределу. При этом наблюдались следы динамического хаоса и сильнейшее изменение статистики фотона. Ожидается, что это позволит лучше понять динамический хаос в квантовых системах.

Теперь рассмотрим исследования, посвященные случаю малой задержки  $\tau_{del} < \tau_{osc}$ . В принципе, рассмотрение этого случая шло параллельно с рассмотрением противоположного и началось также в упомянутых в статьях [220, 228]. Уже тогда было ясно, что для малых времен задержки  $\tau_{del}$ , фаза возвращаемого поля  $\phi_{del}$  всегда оказывает существенное влияние на поведение выходной мощности. Напомним, что для случая большой задержки при достаточно сильной связи фаза перестает играть какую-либо роль. Для случая малой задержки были получены [260] условия для минимальной критической силы задержанной связи, при которой лазер терял стабильность, в этой же статье были получены характерные частоты осцилляций.

Нестабильности типа динамического хаоса возможно детально наблюдать только лишь при использовании приборов с большим временным разрешением. Впервые это было сделано в эксперименте [261], в нем были обнаружены регулярные и нерегулярные короткие всплески. В принципе, все сказанное выше о стационарных точках системы можно отнести и к случаю малой задержки, с той разницей, что таких точек значительно меньше. Тем не менее, динамика лазера в основном происходит вблизи этих точек (но не обязательно всех). Так, было продемонстрировано [262], что в зависимости от фазы наблюдается либо стабильная генерация, либо периодические автоколебания интенсивности, либо регулярные или даже нерегулярные наборы всплесков. В этой же работе, кроме экспериментов, было проведено и численное моделирование и исследование бифуркаций.

В работе [262] длина линии задержки была порядка  $1\text{ см}$ , а в работе [263] длина имела существенно меньшую величину  $200\ \mu\text{м}$ , что технологически значительно сложнее. Так или иначе, автопульсации наблюдались и в этом случае. Были проведены даже эксперименты [264], в которых в ли-

нию задержки устанавливался оптический усилитель, так что силу связи и фазу можно было довольно точно и независимо изменять. И для этого случая наблюдались различные типы автопульсаций и хаотического поведения. Следует особо отметить, что введение задержанной связи, не всегда ведет к нестабильностям, а, иногда, напротив, может приводить к стабилизации излучения и выходу из хаотического режима [213, 265–267].

Все приведенные статьи касаются одномодового лазера, однако, крайне интересен вопрос об учете других продольных мод. В экспериментах было обнаружено, что другие моды либо вообще не оказывают влияния, либо могут оказывать сильное влияние лишь на статистику и поведение лазера в режиме динамического хаоса [268, 269]. В теоретическом плане, также были предложены различные модификации модели Кобаяши-Лэнга, учитывающие несколько мод вместо одной [269, 270]. Однако в конечном счете было понято, что хотя другие моды и могут влиять на хаотическое поведение лазера, в подавляющем большинстве случаев одномодового описания классической модели Кобаяши-Лэнга вполне достаточно [269–271]

В лазерах с большой апертурой часто возникает пространственно-временная нестабильность генерации в поперечном сечении выходного луча. Этот эффект наблюдался в самых различных типах лазеров и был объяснен теоретически [272–278]. Интересно, что в некоторых случаях задержанная связь может стабилизировать пучок [279–281] и выполнять полезную функцию как при стабилизации частоты, виденной нами ранее.

Обращаясь к другим типам обратной связи, стоит остановиться на частотно избирательной задержанной связи. В этом случае назад по линии задержки возвращается не весь спектр а лишь его часть, например, с помощью брэгговской решетки можно вернуть весьма узкий диапазон. Подобная задержанная связь может уменьшить ширину линии спектра лазера [282]. С теоретической точки зрения эти проблемы были рассмотрены для резонатора Фабри-Перо со слабым фильтром [283], для решетки [284] и для брэгговской решетки в волокне [285]. Подобная задержанная связь может сильно изменить характер и стабильность стационарных точек, и даже все динамическое поведение лазера [286, 287]. Например, интересным и уникальным

эффектом является колебание частоты генерации при почти постоянной интенсивности выходного излучения.

Прямое отношение к четвертой главе имеет экзотический случай задержанной связи, поворачивающей поляризацию на  $90^\circ$ . Дело в том, что для того, чтобы имел место эффект переключения мод под действием перекрестной обратной связи с задержкой, необходимо выполнение нескольких простых условий, наложенных на рассматриваемую пару мод.

- У них должны быть близкие оптические частоты.
- Потери мод должны быть близки.
- И, что важнее всего, поля мод должны сильно перекрываться в пространстве.

При выполнении этих условий моды оказываются сильно взаимодействующими. Из-за этого изменение интенсивности одной моды тут же влечет не менее слабое изменение интенсивности другой. Таким образом, малыми воздействиями на лазер можно изменять соотношения между двумя модами высокой интенсивности. Таким внешним воздействием и является пришедшее из линии задержки поле. Для большей наглядности можно привести механическую аналогию: два одинаковых тяжелых груза, подвешенных на концах троса, перекинутого через подвижный блок. Малыми внешними воздействиями можно изменять высоту одного блока за счет изменения высоты другого.

Указанным условиям не удовлетворяют продольные моды в Фабри-Перо резонаторе, подобное вырождение вообще встречается довольно редко. Однако этим условиям удовлетворяют как противоположно направленные моды в кольцевом или МШГ резонаторе, так и моды с ортогональными поляризациями в резонаторе Фабри-Перо. Именно поэтому можно ожидать возникновения переключений в резонаторе Фабри-Перо с периодом, равным удвоенному времени задержки, и в случае слабой задержанной связи с поворотом поляризации. И вот этот эффект, действительно, наблюдался довольно давно [288, 289]. При этом, если сила задержанной связи слишком мала или же разница в потерях у мод слишком велика, то переключений не будет, однако могут быть и другие эффекты за счет взаимодействия по-

ля с носителями заряда, например, динамических хаос. В общем виде при различных конфигурациях связи проблема исследована в [290, 291].

#### 4.2 Уравнения для кольцевых лазеров с перекрестной внешней оптической обратной связью с задержкой

Устройство с задержанной обратной связью нельзя получить из обычных уравнений полуклассической теории лазера [292] и, прежде всего, необходимо получить эти уравнения. уравнения полуклассической теории лазера (обозначения использованы такие же, как в [293]) могут быть записаны как

$$i(\partial_{t'} + \mathcal{K}_j)\beta_j(t') - \omega_{cj}\beta_j(t') = \frac{n}{L} \int_0^L dx g_j^*(x)\alpha(x, t') \quad (21a)$$

$$i(\partial_{t'} + \gamma_{\perp})\alpha(x, t') - \omega_A\alpha(x, t') = -\mathcal{D}(x, t') \sum_j g_j(x)\beta_j(t') \quad (21b)$$

$$i(\partial_{t'} + \gamma_{\parallel})\mathcal{D}(x, t') = i\sigma\gamma_{\parallel} + 2 \sum_j [g_j(x)\alpha^*(x, t')\beta_j(t') - c.c.] \quad (21c)$$

Здесь электрическое поле внутри резонатора разложено по модам резонатора  $E_{in}(x, t') = \sum \beta_j(t') g_j(x) c_j$ , где индекс  $j$  пробегает номера всех мод.

$\beta_j(t')$  - комплексная амплитуда и  $g_j(x)$  это пространственное распределение поля,  $c_j$  - нормировочные константы.

Переменная  $\alpha(x, t')$  - индуцированная поляризованность,  $\mathcal{D}(x, t')$  - инверсия заселенности,  $\mathcal{K}_j$  потери  $j$ -й моды в резонаторе,  $\gamma_{\perp}$  и  $\gamma_{\parallel}$  поперечное и продольное время релаксации,  $n$  - концентрация частиц активной среды,  $\omega_{cj}$  - собственная частоты  $j$ -й моды резонатора, а  $\omega_A$  - частоты оптического перехода в двухуровневом атоме активной среды. Символ  $\sigma$  обозначает

стационарную величину инверсии  $\mathcal{D}(x, t')$  при отсутствии поля ( $\beta_j(t') = 0$ ;  $\partial_{t'}\mathcal{D}(x, t') = 0$ )

Для того, чтобы пояснить процесс получения уравнений с задержанной связью, рассмотрим значительно более простой случай: одна мода в резонаторе из прозрачного материала с диэлектрической проницаемостью, возможно переменной  $\epsilon(x)$  (вне резонатора  $\epsilon = 1$ ). Активной среды при этом нет. Предположим, что на наш открытый резонатор падает независимое внешнее поле, возбуждая моду внутри резонатора. Это поле  $E_{ex}(x, t') = f_{ex}(t')\hat{g}_{ex}(x)$  удовлетворяет уравнению в свободном пространстве  $\Delta E_{ex}(x, t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_{ex}(x, t')}{\partial t'^2} = 0$ . Резонатор, таким образом, является возмущением свободного пространства. Пространственная часть единичной моды  $\hat{g}_m(x)$  резонатора удовлетворяет уравнению  $\Delta \hat{g}_m(x) + \epsilon(x) \frac{\omega_m^2}{c^2} \hat{g}_m(x) = 0$ . В открытом резонаторе собственная частота  $\omega_m$  должна быть комплексной из-за наличия потерь, но сейчас это не существенно. Наша цель - получить решение уравнения  $\Delta E_{total}(x, t') - \frac{\epsilon(x)}{c^2} \frac{\partial^2 E_{total}(x, t')}{\partial t'^2} = 0$  для полного поля с 'граничным условием', что поле вдали от резонатора должно равняться падающему  $E_{total}(\infty, t') = E_{ex}(\infty, t')$ . Теперь рассмотрим полное поле, приблизительно равное  $E_{total}(x, t') = f_m(t')\hat{g}_m(x) + f_{ex}(t')\hat{g}_{ex}(x)$ . Здесь  $f_m(t')$  - единственная неизвестная функция, которую требуется найти. Используя все условия, приведенные выше, и условие нормировки для  $\int \hat{g}_m(x)\epsilon(x)\hat{g}_m^*(x) = 1$ , получим  $\omega_m^2 f_m(t') + \ddot{f}_m(t') + \ddot{f}_{ex}(t')\alpha = 0$ , где  $\alpha = \int \hat{g}_{ex}(x)(\epsilon(x) - 1)\hat{g}_m^*(x)$ . Это уравнение эквивалентно уравнению для осциллятора с внешней силой.

Следующий шаг - исключить вторую производную по времени. Мы предполагаем, что внешняя сила почти совпадает по частоте с частотой моды  $\omega_m \sim \omega_{ex}$ . Если внешнее поле имеет вид  $f_{ex}(t') = F(t')e^{-i\omega_{ex}t'}$ , где  $F(t')$  - медленно меняющаяся амплитуда, мы можем написать  $f_m(t') = E_m(t')e^{-i\omega_m t'}$ . Здесь  $E_m(t')$  это медленно меняющаяся функция. Используя условие медленного изменения, мы полагаем, что  $\ddot{E}_m(t') \rightarrow 0$ ,  $\ddot{F}(t') \rightarrow 0$  и  $\alpha \dot{F}(t') \rightarrow 0$ . Таким образом, мы получим  $\dot{f}_m(t') = -i\omega_m f_m(t') + i \frac{\alpha \omega_{ex}^2}{2\omega_m} f_{ex}(t')$ .

Подобный расчет был проведен для настоящей модели лазера, что ведет к модифицированным уравнениям (21). После математических преобразований, аналогичных [34], мы получим

$$(\partial_t + 1)E_1 = wE_{2\tau} + (1 + i\Delta)\tilde{A}(E_1D_0 + E_2D_1^*) \quad (22a)$$

$$(\partial_t + 1)E_2 = wE_{1\tau} + (1 + i\Delta)\tilde{A}(E_2D_0 + E_1D_1) \quad (22b)$$

$$(\partial_t + d_{\parallel})D_0 = d_{\parallel} - \tilde{d}_{\parallel}D_0(|E_1|^2 + |E_2|^2) - \tilde{d}_{\parallel}(E_1E_2^*D_1 + cc) \quad (22c)$$

$$(\partial_t + d_{\parallel}^a)D_1 = -\tilde{d}_{\parallel}D_1(|E_1|^2 + |E_2|^2) - \tilde{d}_{\parallel}E_1^*E_2D_0 \quad (22d)$$

Здесь  $w$  - малый параметр, характеризующий силу задержанной связи,  $E_j(t) = (\frac{4|g|^2}{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}})^{1/2}e^{i\omega_c t}\beta_j(t)$ ;  $D_n(t) = \frac{1}{L\sigma} \int_0^L \mathcal{D}e^{i2nkx} dx$ ;  $t = t'\mathcal{K}_1$ ;  $\tau = \tau'\mathcal{K}_1$ ;  $A = \frac{\sigma n|g|^2}{\gamma_{\perp}\mathcal{K}_1}$ ;  $d_{\parallel} = \frac{\gamma_{\parallel}}{\mathcal{K}_1}$ ;  $d_{\perp} = \frac{\gamma_{\perp}}{\mathcal{K}_1}$ ;  $w = w'e^{i\omega_c\tau d}$ ;  $|g|^2 = \frac{2\pi\omega_c}{\hbar}\mu^2$ ;  $\Delta = \frac{\omega_c - \omega_A}{\gamma_{\perp}}$ ;  $\mu$  - дипольный момент. Индекс ' $\tau$ ' означает задержку данной переменной от времени на время  $\tau$ , например  $E_{1\tau} = E_1(t - \tau)$ . Символ ' $\sim$ ' над другим символом означает  $\tilde{f} = \frac{f}{1+\Delta^2}$ . Символ 'cc' это обозначение слагаемого, комплексно сопряженного идущему перед ним. В общем случае, постоянная  $d_{\parallel}^a \neq d_{\parallel}$ , это позволяет учесть дополнительную релаксацию, связанную с подвижностью носителей заряда [294], что особенно важно, например, для полупроводниковых лазеров.

Нужно отметить, что энергия, которая возвращается обратно в резонатор по задержанной связи, 'изымается' из одной из мод резонатора. Эти потери энергии должны быть приняты во внимание в константе  $\mathcal{K}_j$ . Уравнение (22) описывает все основные типы кольцевых лазеров с задержанной связью. Это основные уравнения данной главы и все дальнейшее рассуждение основано на них.

Если пренебречь задержанной связью ( $w = 0$ ), уравнения (22) сведутся к аналогичным [34]. С другой стороны, для обычного полупроводникового лазера коэффициент диффузии носителей заряда велик  $d_{\parallel}^a \gg d_{\parallel}$  и пространственная гармоника  $D_1(t)$  быстро релаксирует и, значит, мо-



жет быть адиабатически исключена. Предполагая  $D_1'(t) = 0$ , мы получим  $d_{\parallel}^a D_1 \approx -\tilde{d}_{\parallel} E_1^* E_2 D_0$ , и уравнения (22) становятся аналогичными уравнениям полупроводникового лазера из [215]. Однако, отличие между ними заключается в наличии слагаемых вида  $\sim |E_1|^2 E_1$  и  $\sim |E_1|^2 |E_1|^2$ . Это отличие связано с тем, что в нашей модели мы пренебрегли зависимостью констант (21) от интенсивности света. Кроме того, мы пренебрегли обратным отражением в резонаторе, связанным, например, с его дефектами. Оба явления несущественны для эффекта переключения мод и мы не будем их рассматривать.

#### 4.3 Численное изучение вынужденного эффекта переключения мод

Численные решения (22) для  $CO_2$  с типичными параметрами  $A = 4$ ,  $d_{\parallel} = d_{\parallel}^a = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\Delta = 0.02$ ,  $\tau = 5000$  при различных  $w$  показаны на Рис. 14. В соответствии с [34]  $\Delta_{crit} \approx \sqrt{\frac{d_{\parallel} A^2}{A-1}} = 0.032$ , так что эффект переключений отсутствует без наличия задержанной связи ( $w = 0$ ).

Как видно из приведенных картинок, для достаточно малой силы задержанной связи  $w = 0.0025$  однонаправленное стационарное решение остается стабильным. Для критического значения силы обратной связи  $w_{crit} = 0.0039$  это решение теряет стабильность и начинается сложное хаотическое поведение. Однако, для достаточной силы задержанной связи устанавливается режим регулярных автопереключений ( $w = 0.01$ ).

Эта схема 'Однонаправленное решение - хаотичное поведение - режим регулярных переключений' типична при возрастающем  $w$ , независимо от остальных параметров. Хаотическое поведение наблюдается для довольно узкого диапазона  $w$ . Однако, поведение системы чрезвычайно сложно и мы не претендуем на его полное изучение.

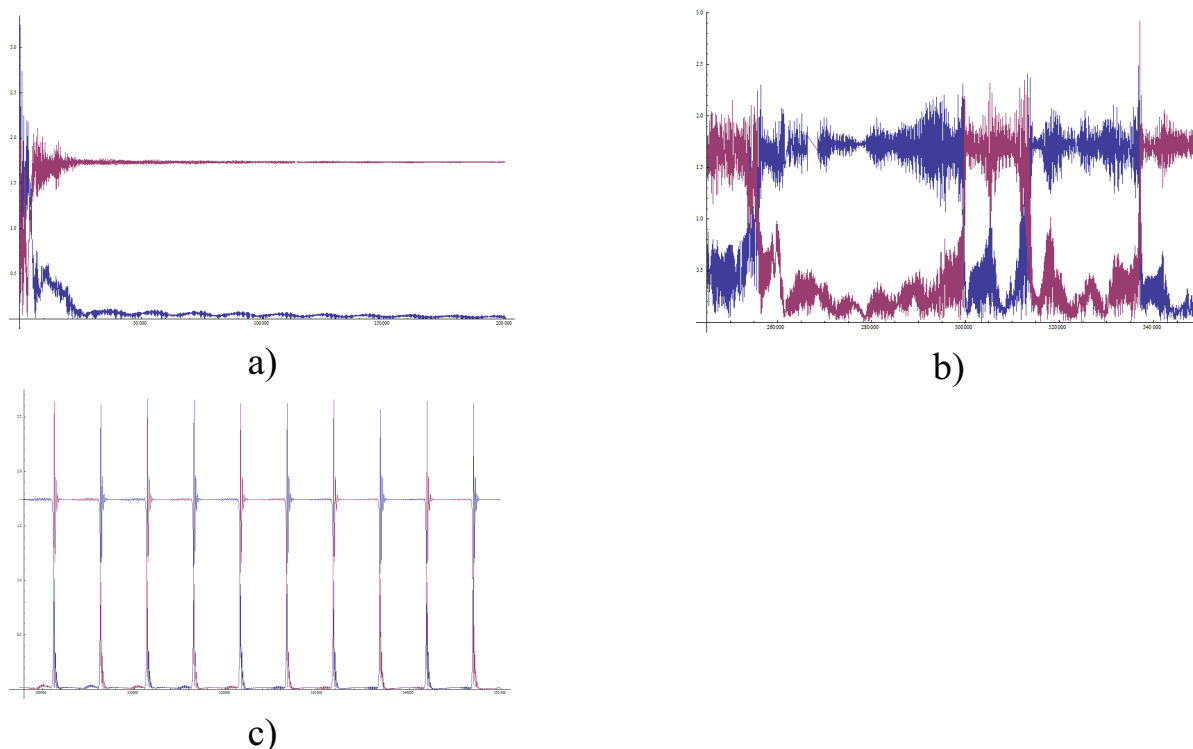


Рисунок 14 – Численное решение уравнений (22) для различной величины задержанной связи  $w$ . (a)  $w=0.0025$  (b)  $w=0.0039$  (c)  $w=0.01$

#### 4.4 Аналитическая формула для критической силы внешней обратной связи

Теперь нашей целью будет получить формулу для минимального значения силы обратной связи  $w_{switch}$ , при которой лазер начинает работать в режиме переключения мод. Как указано выше, эта величина довольно близка к критическому значению  $w_{crit}$ , при котором однонаправленное решение теряет стабильность  $w_{switch} \sim w_{crit}$ .

Для того, чтобы найти  $w_{crit}$ , мы должны исследовать стабильность однонаправленного решения уравнений (22). Эти уравнения не являются обычными нелинейными уравнениями, а так называемыми "уравнениями с отклоняющимся аргументом". Этот тип уравнений изучен значительно хуже, однако такие основные вопросы, как стабильность стационарного решения, исследованы достаточно хорошо. (см. например [295])

Вычисление приблизительной верхней границы для  $w_{crit}$ , основанное на этой теории, приведено в приложении А, запишем результат

$$|w_{crit}|^2 = \frac{\sqrt{A-1} \sqrt{d_{\parallel}} ([(A-1)d_{\parallel} + d_{\parallel}^a]^2 - \Delta^2(A-1)d_{\parallel})}{d_{\parallel}^a + (A-1)d_{\parallel}} \quad (23)$$

для  $d_{\parallel} \ll 1$ ,  $d_{\parallel}^a \ll 1$ ,  $\Delta^2 \ll 1$  и  $\tau \gg 1/d_{\parallel}$ .

Когда нет диффузии носителей заряда  $d_{\parallel} = d_{\parallel}^a$  выражение упрощается:

$$|w_{crit\ simp}|^2 = \frac{\sqrt{A-1} \sqrt{d_{\parallel}} (A^2 d_{\parallel} - \Delta^2(A-1))}{A}. \quad (24)$$

Поскольку выражение дает верхнюю границу, при  $w > w_{crit}$  однонаправленное решение гарантированно теряет свою стабильность. Справедливость (23) была проверена сравнением с  $w_{crit}$  и  $w_{switch}$ , полученными непосредственно численным моделированием уравнений (22). Соответствующие результаты приведены в таблице 4.

Интересная особенность формулы состоит в том, что, когда  $\Delta = 0$ ,  $w_{crit} \neq 0$ . Это означает, что даже при отсутствии расстройки частоты возможен режим вынужденных переключений. В физических переменных (21) переписывается как

$$w^2 > \frac{1}{\gamma_{\perp}} \sqrt{\frac{\sigma n |g|^2}{\gamma_{\perp} \mathcal{K}_1} - 1} \sqrt{\frac{\gamma_{\parallel}}{\mathcal{K}_1} \frac{\sigma n |g|^2 \gamma_{\parallel}}{\mathcal{K}_1^2}} \quad (25)$$

для  $\Delta = 0$ . Для полупроводникового лазера с квантовыми точками (диффузия и отстройка частоты отсутствуют) имеем  $d_{\parallel} = 3 \cdot 10^{-3}$ ;  $d_{\perp} = 3$ ;  $A = 2$ ;  $\Delta = 0$ , [296] и формула (23) даст  $w > 0.07$ . Таким образом, требуется передать в противоположную моду лишь 7% теряемой мощности (потери равны 1) для того, чтобы начался эффект вынужденных переключений. Это позволяет надеяться, что его можно наблюдать в подобном типе лазеров.

Уравнения (22) охватывают случай обыкновенного полупроводникового лазера [294]. Однако, получение формулы для критической силы обратной связи  $w_{crit, semicond}$  отличается из-за совершенно иного соотношения между параметрами:  $d_{\parallel} \ll d_{\parallel}^a$ ,  $d_{\parallel} \ll 1$ ,  $\Delta^2 \gg 1$  и  $\tau \gg 1/d_{\parallel}$ . Важнейшее отличие состоит в очень большой величине  $d_{\parallel}^a$ , связанной с высокой по-

движностью носителей заряда. Также большую величину имеет параметр  $\Delta^2$ , выражающий в данном случае высокую степень асимметрии полосы усиления полупроводникового лазера. При этих условиях изучение устойчивости дает следующую приближенную формулу для необходимой силы задержанной обратной связи

$$|w_{crit,semicond}|^2 = \frac{d_{\parallel}^2}{4 d_{\parallel}^a} \tilde{A}(\tilde{A} - 1). \quad (26)$$

Как и в формуле (24) необходимая сила обратной связи тем больше, чем больше величина накачки  $(\tilde{A} - 1)$ . Из-за подвижности носителей любые неоднородности инверсии заселенности быстро размываются, поэтому в полупроводниковом лазере не могут наблюдаться автопереключения, что выражается в отсутствии соответствующего множителя в формуле (26). Вместе с тем, вынужденные переключения вызвать тем легче, чем больше подвижность носителей  $d_{\parallel}^a$ . Подставив в (26) параметры типичного полупроводникового лазера  $A = 17$ ,  $d_{\parallel} = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $\Delta = 3.5$ ,  $\frac{d_{\parallel}^a}{d_{\parallel}} = 100$ , получим  $|w_{crit,semicond}| \approx 0.0013$ , что значительно меньше, чем для других типов лазеров, поэтому именно в полупроводниковых лазерах явление вынужденных автопереключений наблюдать должно быть легче всего. В таком типе лазеров оно впервые и наблюдалось [218], при этом сила связи, меньшая необходимой, даже не была достигнута, а наименьшая достигнутая величина была оценена авторами как  $-36dB$ , что соответствует  $w = 0.0003$ .

#### 4.5 Заключение

В этой главе были получены уравнения, описывающие кольцевой лазер с перекрестной внешней обратной связью с задержкой (22). Эти уравнения охватывают чрезвычайно широкий спектр различных типов лазеров таких, как полупроводниковые, на красителях, газовые, лазеры на квантовых точках и т.д. С использованием полученных уравнений были промоделированы

A	$\Delta$	$d_{\parallel}$	$\tau$	$W_{crit\ num}$	$W_{switch\ num}$	$W_{crit\ form}$
1.5	$10^{-2}$	$10^{-4}$	120480	$8.7 \cdot 10^{-4}$	$15 \cdot 10^{-4}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$
1.5	0	$10^{-4}$	120480	$6 \cdot 10^{-4}$	$11 \cdot 10^{-4}$	$10 \cdot 10^{-4}$
1.5	$10^{-2}$	$10^{-4}$	40050	$9 \cdot 10^{-4}$	$14 \cdot 10^{-4}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$
3	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-3}$	10020	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$	$7.7 \cdot 10^{-3}$

Таблица 4 – Сравнение формулы (24) с численно полученными результатами. Полученная прямым моделированием величина  $w_{crit\ num}$  - критическая сила задержанной связи, при которой однонаправленное решение теряет стабильность, также полученная моделированием  $w_{switch\ num}$  - величина силы задержанной связи при которой устанавливается режим регулярных переключений. Величина  $w_{crit\ form}$  - сила задержанной связи, при которой решение теряет стабильность, но полученная по формуле (23).

типичные ситуации в данной системе такие как: стабильная однонаправленная генерация, потеря устойчивости решения и переход к хаотическому поведению, переход к регулярным переключениям.

Мы продемонстрировали, что малая перекрестная оптическая связь с задержкой может привести к переключению встречных мод в кольцевом лазере. Период этих переключений примерно равен удвоенному времени задержки. Это время должно быть больше, чем все характерные времена внутри лазера. Была получена приближительная аналитическая формула для необходимой силы задержанной обратной связи, способной вызвать переключения в лазерах с малоподвижными носителями заряда (23). Эта формула была проверена сравнением с прямым численным моделированием. С её помощью было показано, что эффект вполне возможен в такой системе как кольцевой полупроводниковый лазер на квантовых точках ( 5% мощности). Была получена также формула для полупроводникового лазера, характеризующегося высокой степенью подвижности носителей, она дала оценку мощности необходимой возвращаемой мощности в 0.1% , что соответствует экспериментальным данным.

## **Приложения**

**Получение аналитической формулы для величины задержанной обратной связи, достаточной для потери однонаправленным решением своей стабильности**

Сперва перепишем уравнения (22) в действительных числах. Вообще говоря  $w$  - комплексное число, однако мы предположим, что оно действительно. Этого достаточно для наших целей, поскольку мы ищем лишь верхнюю границу для  $w_{crit}$  (см. ниже и Приложение В). Сделав замену

$$E_{1,2}(t) = |E_{1,2}(t)|e^{i\varphi_{1,2}(t)}; \quad D_1 = |D_1|e^{i\varphi_s}; \quad D_0 = |D_0|,$$

получим

$$\begin{aligned} |\dot{E}_1| = & -|E_1| + w|E_{2\tau}|\cos(\varphi_{2\tau} - \varphi_1) + \tilde{A}|E_1||D_0| + \\ & \gamma_m \tilde{A}|E_2||D_1|\cos(\varphi_\Delta + \gamma_a) \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1|E_1| = & w|E_{2\tau}|\sin(\varphi_{2\tau} - \varphi_1) + \Delta\tilde{A}|E_1||D_0| + \\ & \gamma_m \tilde{A}|E_2||D_1|\sin(\varphi_\Delta + \gamma_a) \end{aligned} \quad (27b)$$

$$\begin{aligned} |\dot{E}_2| = & -|E_2| + w|E_{1\tau}|\cos(\varphi_{1\tau} - \varphi_2) + \tilde{A}|E_2||D_0| + \\ & \gamma_m \tilde{A}|E_1||D_1|\cos(-\varphi_\Delta + \gamma_a) \end{aligned} \quad (27c)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2|E_2| = & w|E_{1\tau}|\sin(\varphi_{1\tau} - \varphi_2) + \Delta\tilde{A}|E_2||D_0| + \\ & \gamma_m \tilde{A}|E_1||D_1|\sin(-\varphi_\Delta + \gamma_a) \end{aligned} \quad (27d)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_s D_0 = & -d_{||}D_0 + d_{||} - \tilde{d}_{||}D_0(|E_1|^2 + |E_2|^2) - \\ & \tilde{d}_{||}|D_1||E_1||E_2|2\cos(\varphi_\Delta) \end{aligned} \quad (27e)$$

$$\dot{D}_1 = -d_{||}^a D_1 - \tilde{d}_{||} D_1 (E_1^2 + E_2^2) - \tilde{d}_{||} D_0 E_1 E_2 \cos(\varphi_\Delta) \quad (27f)$$

$$\dot{\varphi}_s D_1 = -\tilde{d}_{\parallel} D_0 E_1 E_{2\tau} \sin(\varphi_{\Delta}) \quad (27g)$$

Здесь  $\varphi_{\Delta} = \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_s$ ;  $\gamma_m = \sqrt{1 + \Delta^2}$  и  $\gamma_a = \arctan(\Delta)$ . Модули могут быть постоянны только если фазы удовлетворяют  $\varphi_{1,2} = \Omega t + \psi_{1,2}$ , где  $\psi_{1,2}$  - постоянные,  $\Omega \approx \Delta$  - неизвестная постоянная величина и фаза  $\varphi_s(t) = \psi_s$  так же является постоянной. Однонаправленное стационарное решение в первом порядке по  $w$  записывается следующим образом:

$$D_0^s = \frac{1}{A}; \quad D_1^s = \frac{w}{A\gamma_m}; \quad E_1^s = \sqrt{A^2 - \gamma_m^2}; \quad E_2^s = w \frac{d_{\parallel}^a + d_{\parallel} E_1^{s2}}{d_{\parallel} E_1^s \gamma_m}; \quad \psi_2 - \psi_1 - \psi_s = \pi; \quad \psi_2 - \psi_1 + \Omega\tau + \gamma_a = 0;$$

Соотношения для фаз имеют простой физический смысл. Соотношение  $\psi_2 - \psi_1 - \psi_s = \pi$  эквивалентно  $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) - \varphi_s(t) = \pi$ , что означает, что стоячая волна, сформированная встречными модами выжигает решетку инверсии заселенности, находящуюся в противофазе к ней.

Соотношение  $\psi_2 - \psi_1 + \Omega\tau + \gamma_a = 0$  эквивалентно  $\varphi_2(t) - \varphi_1(t - \tau) = -\gamma_a$ . Это означает, что фаза  $E_2$  почти равна  $E_1(t - \tau)$ .

Искать постоянную  $\Omega$  приближенными способами некорректно при  $\Omega\tau \gg 1$ . Это связано с тем, что  $w_{crit}(\tau)$  есть быстроосциллирующая функция  $\tau$ . Поэтому для того, чтобы получить верхнюю границу  $w_{crit}(\tau)$  необходимо немного сдвинуть  $\tau$  до  $\tau_{up}$ , чтобы найти ближайший локальный максимум  $w_{crit}(\tau_{up})$ . Иными словами, мы будем искать огибающую быстроосциллирующей функции  $w_{crit}(\tau)$ .

Для того, чтобы подавить переключение мод, стоячая волна, сформированная задержанными встречными модами, должна быть в фазе с решеткой инверсии. Иными словами,  $\varphi_1(t - \tau_{up}) - \varphi_2(t - \tau_{up}) - \varphi_s(t) = 0$ , т.е. фазовый сдвиг должен быть равен нулю. Используя это и другие условия получим  $\Omega\tau_{up} = \frac{\pi}{2} + \pi m$ , где  $m = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Теперь изучим устойчивость однонаправленного решения. Для этого проведем линеаризацию (27) вблизи стационарной точки  $|E_1| = E_1^s + \delta E_1(t)$ ;



$\varphi_1 = \Omega t + \psi_2 + \delta\psi_2$  и т.д., что даст

$$\delta\dot{E}_1 = -B_1 \cdot \delta E_2 + w \cos(\psi_D - \Omega\tau) \cdot \delta E_{2\tau} - \frac{B_4 B_1}{B_2} \cdot \delta D_1 + \frac{B_4 E_1^s}{B_4 E_1^s} \cdot \delta D_0 \quad (28a)$$

$$\delta\dot{E}_2 = -B_1 \cdot \delta E_1 + B_1 \cdot \delta E_{1\tau} + B_1 E_1^s \Delta \cdot \delta\psi_1 - B_1 E_1^s \Delta \cdot \delta\psi_{1\tau} - B_4 E_1^s \cdot \delta D_1 + B_1 E_1^s \Delta \cdot \delta\psi_s + (B_1 B_4 / B_2) \cdot \delta D_0 \quad (28b)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{\psi}_2 = & B_4 \Delta \cdot \delta D_0 - B_2 \Delta \cdot \delta E_1 + B_2 \Delta \cdot \delta E_{1\tau} - \\ & \frac{(B_2 B_4 \Delta E_1^s)}{B_1} \cdot \delta D_1 - B_2 E_1^s \cdot \delta\psi_1 + B_2 E_1^s \cdot \delta\psi_{1\tau} - \\ & B_2 E_1^s \cdot \delta\psi_s + (2B_2^2 E_1^s \cos[1/2(\gamma_a + \psi_s + \Omega\tau)] / B_1) \cdot \delta E_2 \end{aligned} \quad (28c)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{\psi}_1 = & B_4 \Delta \cdot \delta D_0 - (B_1 B_4 \Delta) / (B_2 E_1^s) \cdot \delta D_1 - \\ & (B_1 \Delta / E_1^s) \cdot \delta E_2 + (w \sin[\psi_D - \Omega\tau] / E_1^s) \cdot \delta E_{2\tau} \end{aligned} \quad (28d)$$

$$\delta\dot{D}_1 = (d_{\parallel} E_1^s / A) \cdot \delta E_2 - (d_{\parallel}^a + \frac{(E_1^s)^2 d_{\parallel}}{\gamma_m^2}) \cdot \delta D_1 \quad (28e)$$

$$\delta\dot{\psi}_s = -B_3 \delta\psi_1 + B_3 \cdot \delta\psi_2 - B_3 \cdot \delta\psi_s \quad (28f)$$

$$\delta\dot{D}_0 = -(2d_{\parallel} E_1^s / A) \cdot \delta E_1 - d_{\parallel} (1 + (E_1^s)^2 / \gamma_m^2) \cdot \delta D_0, \quad (28g)$$

где  $B_1 = w / \gamma_m$ ;  $B_2 = \frac{E_1^s}{(d_{\parallel}^a / d_{\parallel} + (E_1^s)^2) \gamma_m^2}$ ;  $B_3 = d_{\parallel}^a + (E_1^s)^2 d_{\parallel}$ ;  $B_4 = A / \gamma_m^2$

Эти уравнения являются хорошо изученными линейными уравнениями с задержкой [295]. Мы будем искать решение в форме

$$\{\delta E_1(t), \delta E_2(t), \delta\psi_1(t), \delta\psi_2(t), \delta D_1(t), \delta\psi_s(t), \delta D_0(t)\} = \vec{a} e^{pt}, \quad (29)$$

где  $\vec{a}$  - семимерный постоянный вектор, а  $p$  - неизвестное собственное число. Необходимо решить алгебраические уравнения с детерминантом, как и в случае с обычными линейными уравнениями. Разница в том, что для дифференциальных уравнений с задержкой эти уравнения имеют форму квази-полинома

$$P_0(p) + w^2(P_1(p) + P_2(p) e^{-\tau p} + P_3(p) e^{-2\tau p}) = 0 \quad (30)$$

с точностью до  $w^2$ . Здесь  $P_{0,1,2,3}(p)$  - некоторые полиномы,  $w^2 \ll 1$  и  $\tau \gg 1/d_{\parallel}$ . Известно, что стационарная точка будет стабильной, если все решения линеаризованного уравнения убывают со временем ( $Re[p_i] < 0$  для всех  $i$ ). Мы рассматриваем системы типа газового лазера, поэтому предполагаем, что  $d_{\parallel} \ll 1$ ,  $A > 1$ ,  $\Delta^2 \ll 1$ . Случай без задержанной связи, т.е.  $w = 0$  в (30) рассмотрен в [34] и в том случае  $Re[p] < 0$  при  $\Delta^2 < \frac{d_{\parallel} \tilde{A}^2}{A-1}$

Ниже будет показано, что необходимая сила связи убывает до нуля, когда  $\Delta^2 \rightarrow \frac{d_{\parallel} \tilde{A}^2}{A-1}$ , поэтому мы предполагаем, что  $\Delta^2$  и  $d_{\parallel}$  имеют один и тот же порядок малости. Величины  $p^2$  и  $d_{\parallel}$  также имеют один порядок малости, поскольку  $p_{w=0} \approx \sqrt{d_{\parallel}}(-i\sqrt{A-1} - \frac{A\sqrt{d_{\parallel}}}{2} + \Delta \frac{\sqrt{A-1}}{2})$  для  $w = 0$ . Разложение в ряд по параметрам  $d_{\parallel}$  и  $\Delta^2$  показывает, что  $P_3(ip_i) \gg P_2(ip_i)$ .

Найдем константу  $w = w_0$ , тогда решение (30) имеет вид  $Re[p] = 0$ ,  $p = 0 + ip_i$ . Мы рассмотрим уравнение

$$P_0(ip_i) + w^2(P_1(ip_i) + P_3(ip_i) e^{-i2\tau p_i}) = 0, \quad (31)$$

где действительное число  $w^2$  задано, а  $p_i$  неизвестно.

В случае  $\tau \gg 1$  некорректно использовать теорию возмущений по малому параметру  $w^2$ , чтобы решить это алгебраическое уравнение из-за быстрых осцилляций малой поправки  $w^2(P_1(ip_i) + P_3(ip_i) e^{-i2\tau p_i})$ . Поэтому мы используем специальный метод, описанный в приложении В

### Метод нахождения критических чисел для квазиполиномов

Для того, чтобы пояснить суть метода решения уравнения (31), рассмотрим значительно более простое уравнение  $\sin(bx) = ax$ , где  $b \gg a$ , так что  $\sin(bx)$  есть быстроосциллирующая функция. Очевидно, что это уравнение не имеет корней  $x_0$  таких, что  $ax_0 > 1$ . Если  $b \gg a$  максимальный корень  $x_{max}$  удовлетворяет уравнению  $x_{max}a \approx 1$ . Принципиальная идея здесь состоит в том, чтобы заменить быстроосциллирующую функцию её огибающей.

Теперь рассмотрим немного более сложную задачу

$$p^2 + bp + c + w((p^2 + p)e^{-\tau p} + 2) = 0 \quad (32)$$

для комплексного  $p$ . Здесь  $b \ll c$ ,  $\tau \gg 1$ ,  $b > 0$ ;  $c > 0$ . Формулировка этой проблемы полностью аналогична формулировке для (30)

При  $w = 0$  это уравнение имеет два корня с отрицательной реальной частью. Наша цель состоит в том, чтобы найти такое значение  $w_{crit}$ , при котором реальная часть одного из корней обращается в ноль. Это означает, что  $p$  имеет форму  $p = iq$ , где  $q$  - действительное число, так что уравнение может быть переписано как  $f(q) = -q^2 + ibq + c + w((-q^2 + iq)e^{-i\tau q} + 2)$  и  $f(q) = 0$ . Теперь рассмотрим левую часть уравнения  $f(q)$  как двумерную параметрическую кривую

$$x(q) = \text{Re}[f(q)] = -q^2 + c + w(\text{Re}[(-q^2 + iq)e^{-i\tau q}] + 2)$$

$$y(q) = \text{Im}[f(q)] = bq + w(\text{Im}[(-q^2 + iq)e^{-i\tau q}]).$$

Проблема свелась к тому, чтобы найти такое значение  $w$ , при котором параметрическая кривая проходит через начало координат ( $x=0; y=0$ ). В случае  $w = 0$  кривая  $f(q)$  проходит вблизи нуля. Типичная кривая в этом случае показана на Рис. 15. После усреднения этой кривой по 'периоду'  $2\pi/\tau$  получим

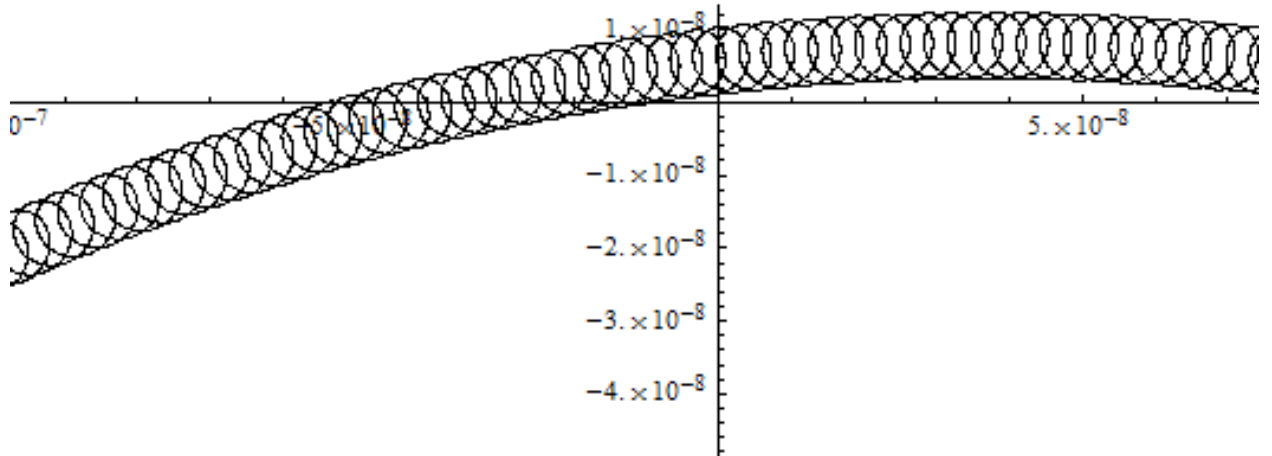


Рисунок 15 – Кривая  $(x(q); y(q))$  с параметром  $q$ . Легко построить две огибающие этой кривой и 'среднюю кривую'  $(\bar{x}(q); \bar{y}(q))$ . Когда нижняя огибающая коснется точки  $(0; 0)$ , это будет означать, что мы достигли критического значения для  $w$ .

$$\bar{x}(q) = -q^2 + c + 2w$$

$$\bar{y}(q) = bq.$$

Быстроосциллирующая часть

$$x_{osc}(q) = \text{Re}[w(-q^2 + iq)e^{-i\tau q}]$$

$$y_{osc}(q) = \text{Im}[w(-q^2 + iq)e^{-i\tau q}]$$

при этом обращается в ноль. Таким образом, мы можем построить две огибающие кривые, которые заключают кривую, как показано на Рис. 15. Задача свелась к тому, чтобы определить при каком  $w$  одна из огибающих проходит через начало координат. Расстояние от найденной выше усредненной кривой до каждой из огибающих  $d$  является медленно меняющейся функцией  $q$  и, очевидно, равно  $d = |w(-q^2 + iq)|$ . В нашем случае точка, ближайшая к началу координат, удовлетворяет уравнению  $q_0^2 - c \approx 0$ . Используя эти условия, из элементарных соображений найдем  $w_{crit} = \frac{b}{\sqrt{c+1}}$ .

## **Благодарности**

Выражаю благодарность коллективу сектора 'Теории оптических и электрических явлений в полупроводниках', в особенности А.М. Монахову за плодотворные обсуждения, Н.И. Саблиной, А.П. Дмитриеву и А.В.Герту за помощь в оформлении диссертации, а также своему научному руководителю Н.С. Аверкиеву. Хочу также поблагодарить своих соавторов М.С. Дунаевского, П.А. Алексеева и С. А. Грудинкина.

## Список публикаций автора по теме диссертации:

**В изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК:**

[A1] Донцов А. А., Монахов А. М., Аверкиев Н. С. Расчет спектра мод шепчущей галереи в цилиндрических резонаторах с возмущенными граничными условиями // Quantum Electronics. – 2013. – Т. 43. – №. 5. – С. 414-417.

[A2] Грудинкин, С. А., Донцов, А. А., Феоктистов и др. Моды шепчущей галереи в сферическом микрорезонаторе с фотолюминесцентной оболочкой // Физика и техника полупроводников. – 2015. – Т. 49. – №. 10. – С. 1415-1420.

[A3] Dunaevskiy, M., Dontsov, A., Alekseev, P et al Apertureless scanning microscope probe as a detector of semiconductor laser emission // Appl.Phys.Letters. – 2015. – Т. 106. – №. 17. – С. 171105.

[A4] Dontsov A. A. Mode switching in ring lasers with delayed optical feedback // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2015. – Т. 23. – №. 1. – С. 71-77.

## Список литературы

- 1 Rayleigh J. S. B. The theory of sound, vol. 2, revised and enlarged macmillan // London, New York. – 1896. – P. 132.
- 2 Raman C., Sutherland G. Whispering-gallery phenomena at st. paul's cathedral // Nature. – 1921. – Vol. 108, no. 8.

- 3 Affolter P., Eliasson B. Electromagnetic resonances and q-factors of lossy dielectric spheres // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. — 1973. — Vol. 21, no. 9. — Pp. 573–578.
- 4 Extremely high-q factor dielectric resonators for millimeter-wave applications / J. Krupka, M. E. Tobar, J. G. Hartnett et al. // IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques. — 2005. — Vol. 53, no. 2. — Pp. 702–712.
- 5 Ultra-high-q toroid microcavity on a chip / D. Armani, T. Kippenberg, S. Spillane, K. Vahala // Nature. — 2003. — Vol. 421, no. 6926. — Pp. 925–928.
- 6 Murugan G. S., Wilkinson J. S., Zervas M. N. Optical excitation and probing of whispering gallery modes in bottle microresonators: potential for all-fiber add-drop filters // Optics letters. — 2010. — Vol. 35, no. 11. — Pp. 1893–1895.
- 7 Mie G. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen // Annalen der physik. — 1908. — Vol. 330, no. 3. — Pp. 377–445.
- 8 Wait J. R. A note on the electromagnetic response of a stratified earth // Geophysics. — 1962. — Vol. 27, no. 3. — Pp. 382–385.
- 9 Garrett C., Kaiser W., Bond W. Stimulated emission into optical whispering modes of spheres // Physical Review. — 1961. — Vol. 124, no. 6. — P. 1807.
- 10 Vedrenne C., Arnaud J. Whispering-gallery modes of dielectric resonators // IEE Proceedings H (Microwaves, Optics and Antennas) / IET. — Vol. 129. — 1982. — Pp. 183–187.
- 11 Observation of structure resonances in the fluorescence spectra from microspheres / R. Benner, P. Barber, J. Owen, R. Chang // Physical Review Letters. — 1980. — Vol. 44, no. 7. — P. 475.
- 12 Whispering-gallery-mode-resonator-based ultranarrow linewidth external-cavity semiconductor laser / W. Liang, V. Ilchenko, A. Savchenkov et al. // Optics letters. — 2010. — Vol. 35, no. 16. — Pp. 2822–2824.

- 13 Whispering-gallery mode microdisk lasers / S. McCall, A. Levi, R. Slusher et al. // Applied physics letters. — 1992. — Vol. 60, no. 3. — Pp. 289–291.
- 14 Cros D., Guillon P. Whispering gallery dielectric resonator modes for w-band devices // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. — 1990. — Vol. 38, no. 11. — Pp. 1667–1674.
- 15 Very high-q whispering-gallery mode resonances observed on fused silica microspheres / L. Collot, V. Lefevre-Seguin, M. Brune et al. // EPL (Europhysics Letters). — 1993. — Vol. 23, no. 5. — P. 327.
- 16 Nonlinear and quantum optics with whispering gallery resonators / D. V. Strekalov, C. Marquardt, A. B. Matsko et al. // Journal of Optics. — 2016. — Vol. 18, no. 12. — P. 123002.
- 17 Review of applications of whispering-gallery mode resonators in photonics and nonlinear optics / A. Matsko, A. Savchenkov, D. Strekalov et al. // IPN Progress Report. — 2005. — Vol. 42, no. 162. — Pp. 1–51.
- 18 Городецкий . Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью. — Litres, 2017.
- 19 Raman lasing near 630 nm from stationary glycerol-water microdroplets on a superhydrophobic surface / A. Sennaroglu, A. Kiraz, M. Dündar et al. // Optics letters. — 2007. — Vol. 32, no. 15. — Pp. 2197–2199.
- 20 Grudinin I. S., Ilchenko V. S., Maleki L. Ultrahigh optical q factors of crystalline resonators in the linear regime // Physical Review A. — 2006. — Vol. 74, no. 6. — P. 063806.
- 21 Whispering-gallery modes of dielectric structures: Applications to millimeter-wave bandstop filters / X. H. Jiao, P. Guillon, L. A. Bermudez, P. Auxemery // IEEE transactions on microwave theory and techniques. — 1987. — Vol. 35, no. 12. — Pp. 1169–1175.
- 22 Schwelb O., Frigyes I. Vernier operation of series-coupled optical microring resonator filters // Microwave and optical technology letters. — 2003. — Vol. 39, no. 4. — Pp. 257–261.



- 23 Invited article: Dielectric material characterization techniques and designs of high-q resonators for applications from micro to millimeter-waves frequencies applicable at room and cryogenic temperatures / J.-M. Le Floch, Y. Fan, G. Humbert et al. // Review of Scientific Instruments. — 2014. — Vol. 85, no. 3. — P. 031301.
- 24 Complex permittivity of some ultralow loss dielectric crystals at cryogenic temperatures / J. Krupka, K. Derzakowski, M. Tobar et al. // Measurement Science and Technology. — 1999. — Vol. 10, no. 5. — P. 387.
- 25 Raman lasing near 650nm from pure water microdroplets on a superhydrophobic surface / A. Kiraz, S. Yorulmaz, M. Yorulmaz, A. Sennaroglu // Photonics and Nanostructures-Fundamentals and Applications. — 2009. — Vol. 7, no. 4. — Pp. 186–189.
- 26 Quantum dot microdrop laser / J. Schafer, J. P. Mondia, R. Sharma et al. // Nano letters. — 2008. — Vol. 8, no. 6. — Pp. 1709–1712.
- 27 High frequency gas nano-optomechanical disk resonator / L. Ding, C. Baker, P. Senellart et al. // Physical review letters. — 2010. — Vol. 105, no. 26. — P. 263903.
- 28 Hofer J., Schliesser A., Kippenberg T. J. Cavity optomechanics with ultrahigh-q crystalline microresonators // Physical Review A. — 2010. — Vol. 82, no. 3. — P. 031804.
- 29 Analysis of radiation-pressure induced mechanical oscillation of an optical microcavity / T. Kippenberg, H. Rokhsari, T. Carmon et al. // Physical Review Letters. — 2005. — Vol. 95, no. 3. — P. 033901.
- 30 Kippenberg T. J., Vahala K. J. Cavity optomechanics: back-action at the mesoscale // science. — 2008. — Vol. 321, no. 5893. — Pp. 1172–1176.
- 31 Li Y. L., Millen J., Barker P. Simultaneous cooling of coupled mechanical oscillators using whispering gallery mode resonances // Optics express. — 2016. — Vol. 24, no. 2. — Pp. 1392–1401.
- 32 Whispering gallery mode biosensors in the low-q limit / A. Weller, F. Liu,

- R. Dahint, M. Himmelhaus // Applied Physics B: Lasers and Optics. — 2008. — Vol. 90, no. 3. — Pp. 561–567.
- 33 Vollmer F., Yang L. Review label-free detection with high-q microcavities: a review of biosensing mechanisms for integrated devices // Nanophotonics. — 2012. — Vol. 1, no. 3-4. — Pp. 267–291.
- 34 Bidirectional ring laser: Stability analysis and time-dependent solutions / H. Zeghlache, P. Mandel, N. B. Abraham et al. // Physical Review A. — 1988. — Vol. 37, no. 2. — P. 470.
- 35 Ward J., Benson O. Wgm microresonators: sensing, lasing and fundamental optics with microspheres // Laser & Photonics Reviews. — 2011. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 553–570.
- 36 Rakovich Y. P., Donegan J. F. Photonic atoms and molecules // Laser & Photonics Reviews. — 2010. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 179–191.
- 37 Whispering gallery mode microresonators for biosensing / S. Soria, S. Berneschi, L. Lunelli et al. // Advances in Science and Technology / Trans Tech Publ. — Vol. 82. — 2013. — Pp. 55–63.
- 38 Richtmyer R. Dielectric resonators // Journal of Applied Physics. — 1939. — Vol. 10, no. 6. — Pp. 391–398.
- 39 Gastine M., Courtois L., Dormann J. L. Electromagnetic resonances of free dielectric spheres // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. — 1967. — Vol. 15, no. 12. — Pp. 694–700.
- 40 Wait J. R. Electromagnetic whispering gallery modes in a dielectric rod // Radio science. — 1967. — Vol. 2, no. 9. — Pp. 1005–1017.
- 41 Tobar M. E., Mann A. G. Resonant frequencies of higher order modes in cylindrical anisotropic dielectric resonators // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. — 1991. — Vol. 39, no. 12. — Pp. 2077–2082.
- 42 Whispering-gallery modes in shielded hemispherical dielectric resonators / Z. E. Eremenko, Y. F. Filipov, S. N. Kharkovsky et al. // IEEE transactions

- on microwave theory and techniques. — 2002. — Vol. 50, no. 11. — Pp. 2647–2649.
- 43 Room temperature measurement of the anisotropic loss tangent of sapphire using the whispering gallery mode technique / J. G. Hartnett, M. E. Tobar, E. N. Ivanov, J. Krupka // ieee transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control. — 2006. — Vol. 53, no. 1. — Pp. 34–38.
- 44 Optimum design of a high-q room-temperature whispering-gallery-mode x-band sapphire resonator / J. G. Hartnett, M. E. Tobar, E. N. Ivanov, A. N. Luiten // IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control. — 2013. — Vol. 60, no. 6. — Pp. 1041–1047.
- 45 A review of sapphire whispering gallery-mode oscillators including technical progress and future potential of the technology / C. McNeilage, J. Searls, E. Ivanov et al. // Frequency Control Symposium and Exposition, 2004. Proceedings of the 2004 IEEE International / IEEE. — 2004. — Pp. 210–218.
- 46 Ivanov E. N., Tobar M. E. Low phase-noise microwave oscillators with interferometric signal processing // IEEE transactions on microwave theory and techniques. — 2006. — Vol. 54, no. 8. — Pp. 3284–3294.
- 47 Rotating odd-parity lorentz invariance test in electrodynamics / M. E. Tobar, E. N. Ivanov, P. L. Stanwix et al. // Physical Review D. — 2009. — Vol. 80, no. 12. — P. 125024.
- 48 Use of whispering-gallery modes for complex permittivity determinations of ultra-low-loss dielectric materials / J. Krupka, K. Derzakowski, A. Abramowicz et al. // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. — 1999. — Vol. 47, no. 6. — Pp. 752–759.
- 49 Microwave properties of a rutile resonator between 2 and 10 k / A. Luiten, M. Tobar, J. Krupka et al. // Journal of Physics D: Applied Physics. — 1998. — Vol. 31, no. 11. — P. 1383.
- 50 Hyperparametric effects in a whispering-gallery mode rutile dielectric resonator at liquid helium temperatures / N. R. Nand, M. Goryachev, J.-

- M. I. Floch et al. // Journal of Applied Physics. — 2014. — Vol. 116, no. 13. — P. 134105.
- 51 Selected emerging thz technologies / C. Damm, H. G. Schwefel, F. Sedlmeir et al. // Semiconductor TeraHertz Technology: Devices and Systems at Room Temperature Operation. — 2015. — P. 340.
- 52 Dielectric rod waveguide antenna as thz emitter for photomixing devices / A. Rivera-Lavado, S. Preu, L. E. García-Muñoz et al. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2015. — Vol. 63, no. 3. — Pp. 882–890.
- 53 Long S., McAllister M., Shen L. The resonant cylindrical dielectric cavity antenna // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1983. — Vol. 31, no. 3. — Pp. 406–412.
- 54 Arnold S., Hessel N. Photoemission from single electrostatically levitated microparticles // Review of scientific instruments. — 1985. — Vol. 56, no. 11. — Pp. 2066–2069.
- 55 Lin H.-B., Campillo A. Cw nonlinear optics in droplet microcavities displaying enhanced gain // Physical review letters. — 1994. — Vol. 73, no. 18. — P. 2440.
- 56 Qian S.-X., Snow J. B., Chang R. K. Coherent raman mixing and coherent anti-stokes raman scattering from individual micrometer-size droplets // Optics letters. — 1985. — Vol. 10, no. 10. — Pp. 499–501.
- 57 Campillo A., Eversole J., Lin H. Cavity quantum electrodynamic enhancement of stimulated emission in microdroplets // Physical review letters. — 1991. — Vol. 67, no. 4. — P. 437.
- 58 Braginsky V., Gorodetsky M., Ilchenko V. Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering-gallery modes // Physics Letters A. — 1989. — Vol. 137, no. 7. — Pp. 393–397.
- 59 Coupling semiconductor nanocrystals to a fused-silica microsphere: a quantum-dot microcavity with extremely high q factors / X. Fan, P. Palinginis, S. Lacey et al. // Optics letters. — 2000. — Vol. 25, no. 21. — Pp. 1600–1602.

- 60 Park Y.-S., Cook A. K., Wang H. Cavity qed with diamond nanocrystals and silica microspheres // Nano letters. — 2006. — Vol. 6, no. 9. — Pp. 2075–2079.
- 61 Itchenko V., Yao X., Maleki L. Microsphere integration in active and passive photonics devices. — 2000.
- 62 Fiber-coupled microsphere laser / M. Cai, O. Painter, K. Vahala, P. Sercel // Optics letters. — 2000. — Vol. 25, no. 19. — Pp. 1430–1432.
- 63 Optical frequency comb generation from a monolithic microresonator / P. Del’Haye, A. Schliesser, O. Arcizet et al. // Nature. — 2007. — Vol. 450, no. 7173. — Pp. 1214–1217.
- 64 Kippenberg T. J., Holzwarth R., Diddams S. Microresonator-based optical frequency combs // Science. — 2011. — Vol. 332, no. 6029. — Pp. 555–559.
- 65 Octave-spanning frequency comb generation in a silicon nitride chip / Y. Okawachi, K. Saha, J. S. Levy et al. // Optics letters. — 2011. — Vol. 36, no. 17. — Pp. 3398–3400.
- 66 Octave spanning tunable frequency comb from a microresonator / P. Del’Haye, T. Herr, E. Gavartin et al. // Physical Review Letters. — 2011. — Vol. 107, no. 6. — P. 063901.
- 67 Louyer Y., Meschede D., Rauschenbeutel A. Tunable whispering-gallery-mode resonators for cavity quantum electrodynamics // Physical Review A. — 2005. — Vol. 72, no. 3. — P. 031801.
- 68 Pöllinger M., Rauschenbeutel A. All-optical signal processing at ultra-low powers in bottle microresonators using the kerr effect // Optics express. — 2010. — Vol. 18, no. 17. — Pp. 17764–17775.
- 69 All-optical switching and strong coupling using tunable whispering-gallery-mode microresonators / D. O’shea, C. Junge, M. Pöllinger et al. // Applied Physics B: Lasers and Optics. — 2011. — Vol. 105, no. 1. — Pp. 129–148.
- 70 Sumetsky M., Dulashko Y., Windeler R. Super free spectral range tunable optical microbubble resonator // Optics letters. — 2010. — Vol. 35, no. 11. — Pp. 1866–1868.

- 71 Han K., Kim J. H., Bahl G. Aerostatically tunable optomechanical oscillators // Optics express. — 2014. — Vol. 22, no. 2. — Pp. 1267–1276.
- 72 Sumetsky M. Theory of snap devices: basic equations and comparison with the experiment // Optics express. — 2012. — Vol. 20, no. 20. — Pp. 22537–22554.
- 73 Sumetsky M. Localization of light on a cone: theoretical evidence and experimental demonstration for an optical fiber // Optics letters. — 2011. — Vol. 36, no. 2. — Pp. 145–147.
- 74 Trapping light into high orbital momentum modes of fiber tapers / D. V. Strekalov, A. A. Savchenkov, E. A. Savchenkova, A. B. Matsko // Optics letters. — 2015. — Vol. 40, no. 16. — Pp. 3782–3785.
- 75 Mid-infrared optical frequency combs at 2.5  $\mu\text{m}$  based on crystalline microresonators / C. Y. Wang, T. Herr, P. Del’Haye et al. // Nature communications. — 2013. — Vol. 4. — P. 1345.
- 76 Nonlinear optics and crystalline whispering gallery mode cavities / V. S. Ilchenko, A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, L. Maleki // Physical review letters. — 2004. — Vol. 92, no. 4. — P. 043903.
- 77 Quantum light from a whispering-gallery-mode disk resonator / J. Fürst, D. Strekalov, D. Elser et al. // Physical review letters. — 2011. — Vol. 106, no. 11. — P. 113901.
- 78 Efficient microwave to optical photon conversion: an electro-optical realization / A. Rueda, F. Sedlmeir, M. C. Collodo et al. // Optica. — 2016. — Vol. 3, no. 6. — Pp. 597–604.
- 79 An ultra-small, low-power, all-optical flip-flop memory on a silicon chip / L. Liu, R. Kumar, K. Huybrechts et al. // Nature Photonics. — 2010. — Vol. 4, no. 3. — Pp. 182–187.
- 80 A versatile source of single photons for quantum information processing / M. Förtsch, J. U. Fürst, C. Wittmann et al. // Nature communications. — 2013. — Vol. 4. — P. 1818.

- 81 Chemically etched ultrahigh-q wedge-resonator on a silicon chip / H. Lee, T. Chen, J. Li et al. // Nature Photonics. — 2012. — Vol. 6, no. 6. — Pp. 369–373.
- 82 Directional tunneling escape from nearly spherical optical resonators / S. Lacey, H. Wang, D. H. Foster, J. U. Nöckel // Physical review letters. — 2003. — Vol. 91, no. 3. — P. 033902.
- 83 Fresnel filtering in lasing emission from scarred modes of wave-chaotic optical resonators / N. Rex, H. Tureci, H. Schwefel et al. // Physical review letters. — 2002. — Vol. 88, no. 9. — P. 094102.
- 84 High-power directional emission from microlasers with chaotic resonators / C. Gmachl, F. Capasso, E. Narimanov et al. // Science. — 1998. — Vol. 280, no. 5369. — Pp. 1556–1564.
- 85 Near-ir subwavelength microdisk lasers / Q. Song, H. Cao, S. Ho, G. Solomon // Applied Physics Letters. — 2009. — Vol. 94, no. 6. — P. 061109.
- 86 Modes of wave-chaotic dielectric resonators / H. E. Tureci, H. G. Schwefel, P. Jacquod, A. D. Stone // arXiv preprint physics/0308016. — 2003.
- 87 Türeci H. E., Stone A. D., Collier B. Self-consistent multimode lasing theory for complex or random lasing media // Physical Review A. — 2006. — Vol. 74, no. 4. — P. 043822.
- 88 Fused-silica monolithic total-internal-reflection resonator / S. Schiller, I. Yu, M. M. Fejer, R. L. Byer // Optics letters. — 1992. — Vol. 17, no. 5. — Pp. 378–380.
- 89 Highly efficient frequency doubling with a doubly resonant monolithic total-internal-reflection ring resonator / K. Fiedler, S. Schiller, R. Paschotta et al. // Optics letters. — 1993. — Vol. 18, no. 21. — Pp. 1786–1788.
- 90 Schiller S., Byer R. L. Quadruply resonant optical parametric oscillation in a monolithic total-internal-reflection resonator // JOSA B. — 1993. — Vol. 10, no. 9. — Pp. 1696–1707.

- 91 Very high-order microring resonator filters for wdm applications / B. Little, S. Chu, P. Absil et al. // IEEE Photonics Technology Letters. — 2004. — Vol. 16, no. 10. — Pp. 2263–2265.
- 92 Enhanced coupling to microsphere resonances with optical fibers / A. Serpengüzel, S. Arnold, G. Griffel, J. A. Lock // JOSA B. — 1997. — Vol. 14, no. 4. — Pp. 790–795.
- 93 Rabus D. G. Integrated ring resonators. — Springer, 2007.
- 94 Gorodetsky M. L., Ilchenko V. S. Optical microsphere resonators: optimal coupling to high-q whispering-gallery modes // JOSA B. — 1999. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 147–154.
- 95 Eroded monomode optical fiber for whispering-gallery mode excitation in fused-silica microspheres / N. Dubreuil, J. Knight, D. Leventhal et al. // Optics letters. — 1995. — Vol. 20, no. 8. — Pp. 813–815.
- 96 Ideality in a fiber-taper-coupled microresonator system for application to cavity quantum electrodynamics / S. Spillane, T. Kippenberg, O. Painter, K. Vahala // Physical Review Letters. — 2003. — Vol. 91, no. 4. — P. 043902.
- 97 Schwelb O. Transmission, group delay, and dispersion in single-ring optical resonators and add/drop filters—a tutorial overview // Journal of Lightwave Technology. — 2004. — Vol. 22, no. 5. — Pp. 1380–1394.
- 98 Oda K., Takato N., Toba H. A wide-fsr waveguide double-ring resonator for optical fdm transmission systems // Journal of lightwave technology. — 1991. — Vol. 9, no. 6. — Pp. 728–736.
- 99 High-order tunable filters based on a chain of coupled crystalline whispering gallery-mode resonators / A. A. Savchenkov, V. S. Ilchenko, A. B. Matsko, L. Maleki // IEEE Photonics Technology Letters. — 2005. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 136–138.
- 100 Федоров . . Основы электродинамики. — 1980.
- 101 Морс . ., Фешбах . Методы теоретической физики. — Рипол Классик, 2013. — Vol. 2.



- 102 Vahala K. J. Optical microcavities // Nature. — 2003. — Vol. 424, no. 6950. — Pp. 839–846.
- 103 Thompson R., Rempe G., Kimble H. Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity // Physical Review Letters. — 1992. — Vol. 68, no. 8. — P. 1132.
- 104 Kimble H. J. Strong interactions of single atoms and photons in cavity qed // Physica Scripta. — 1998. — Vol. 1998, no. T76. — P. 127.
- 105 Cavity qed with high-q whispering gallery modes / D. Vernooy, A. Furusawa, N. P. Georgiades et al. // Physical Review A. — 1998. — Vol. 57, no. 4. — P. R2293.
- 106 M. P. E. Spontaneous emission probabilities at radio frequencies // Physical Review. — 1946. — Vol. 69. — P. 681.
- 107 Solomon G., Pelton M., Yamamoto Y. Modification of spontaneous emission of a single quantum dot // physica status solidi (a). — 2000. — Vol. 178, no. 1. — Pp. 341–344.
- 108 High-q wet-etched gaas microdisks containing inas quantum boxes / B. Gayral, J. Gérard, A. Lemaitre et al. // Applied physics letters. — 1999. — Vol. 75, no. 13. — Pp. 1908–1910.
- 109 Cavity-quantum electrodynamics using a single inas quantum dot in a microdisk structure / A. Kiraz, P. Michler, C. Becher et al. // Applied Physics Letters. — 2001. — Vol. 78, no. 25. — Pp. 3932–3934.
- 110 Gérard J.-M., Gayral B. Strong purcell effect for inas quantum boxes in three-dimensional solid-state microcavities // Journal of lightwave technology. — 1999. — Vol. 17, no. 11. — Pp. 2089–2095.
- 111 Enhanced spontaneous emission by quantum boxes in a monolithic optical microcavity / J. Gérard, B. Sermage, B. Gayral et al. // Physical review letters. — 1998. — Vol. 81, no. 5. — P. 1110.
- 112 Time-resolved probing of the purcell effect for inas quantum boxes in gaas microdisks / B. Gayral, J.-M. Gérard, B. Sermage et al. // Applied Physics Letters. — 2001. — Vol. 78, no. 19. — Pp. 2828–2830.

- 113 Probing the spontaneous emission dynamics in si-nanocrystals-based microdisk resonators / A. Pitanti, M. Ghulinyan, D. Navarro-Urrios et al. // Physical review letters. — 2010. — Vol. 104, no. 10. — P. 103901.
- 114 Gérard J., Gayral B. Inas quantum dots: artificial atoms for solid-state cavity-quantum electrodynamics // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. — 2001. — Vol. 9, no. 1. — Pp. 131–139.
- 115 Time-resolved spectroscopy of laser emission from dye-doped droplets / A. Biswas, R. Pinnick, H. Latifi, R. Armstrong // Optics letters. — 1989. — Vol. 14, no. 4. — Pp. 214–216.
- 116 Single radial-mode lasing in a submicron-thickness spherical shell microlaser / S.-B. Lee, M.-K. Oh, J.-H. Lee, K. An // Applied physics letters. — 2007. — Vol. 90, no. 20. — P. 201102.
- 117 Kuwata-Gonokami M., Takeda K. Polymer whispering gallery mode lasers // Optical materials. — 1998. — Vol. 9, no. 1-4. — Pp. 12–17.
- 118 Two-photon-pumped lasing in microdroplets / A. S. Kwok, J. Gillespie, A. Serpengüzel et al. // Optics letters. — 1992. — Vol. 17, no. 20. — Pp. 1435–1437.
- 119 Morrish D., Gan X., Gu M. Observation of orthogonally polarized transverse electric and transverse magnetic oscillation modes in a microcavity excited by localized two-photon absorption // Applied physics letters. — 2002. — Vol. 81, no. 27. — Pp. 5132–5134.
- 120 Light emission from a dye-coated glass microsphere / J. Wang, M. Wang, L. Liu et al. // Journal of luminescence. — 2007. — Vol. 122. — Pp. 949–950.
- 121 Vollmer F., Arnold S. Whispering-gallery-mode biosensing: label-free detection down to single molecules // Nature methods. — 2008. — Vol. 5, no. 7. — Pp. 591–596.
- 122 Whispering gallery mode aptasensors for detection of blood proteins / L. Pasquardini, S. Berneschi, A. Barucci et al. // Journal of biophotonics. — 2013. — Vol. 6, no. 2. — Pp. 178–187.

- 123 Teraoka I., Arnold S. Theory of resonance shifts in te and tm whispering gallery modes by nonradial perturbations for sensing applications // JOSA B. — 2006. — Vol. 23, no. 7. — Pp. 1381–1389.
- 124 Nuhiji E., Mulvaney P. Detection of unlabeled oligonucleotide targets using whispering gallery modes in single, fluorescent microspheres // Small. — 2007. — Vol. 3, no. 8. — Pp. 1408–1414.
- 125 Teraoka I., Arnold S. Enhancing the sensitivity of a whispering-gallery mode microsphere sensor by a high-refractive-index surface layer // JOSA B. — 2006. — Vol. 23, no. 7. — Pp. 1434–1441.
- 126 Enhancing sensitivity of a whispering gallery mode biosensor by subwavelength confinement / O. Gaathon, J. Culic-Viskota, M. Mihnev et al. // Applied physics letters. — 2006. — Vol. 89, no. 22. — P. 223901.
- 127 Teraoka I., Arnold S. Whispering-gallery modes in a microsphere coated with a high-refractive index layer: polarization-dependent sensitivity enhancement of the resonance-shift sensor and te-tm resonance matching // JOSA B. — 2007. — Vol. 24, no. 3. — Pp. 653–659.
- 128 Влияние предварительной обработки тетраэтоксисилана на синтез коллоидных частиц аморфного диоксида кремния / . Трофимова, . Алексенский, . Грудинкин et al. // Коллоидный журнал. — 2011. — Vol. 73, no. 4. — Pp. 535–539.
- 129 Аэрозольное нанесение детонационных наноалмазов в качестве зародышей роста нанокристаллических алмазных пленок и изолированных частиц / . Феоктистов, . Сахаров, . Серенков et al. // Журнал технической физики. — 2011. — Vol. 81, no. 5. — Pp. 132–138.
- 130 . Грудинкин, . Феоктистов, . Трофимова et al. // Письма ЖТФ. — 2013. — Vol. 39, no. 7. — P. 51.
- 131 Photoluminescence characteristics from amorphous sic thin films with various structures deposited at low temperature / J. Xu, L. Yang, Y. Rui et al. // Solid state communications. — 2005. — Vol. 133, no. 9. — Pp. 565–568.

- 132 Астрова ., Нечитайлов . Электрохимическое травление макропор в кремнии с целевыми затравками // Физика и техника полупроводников. — 2008. — Vol. 42, no. 6. — Pp. 762–767.
- 133 Whispering-gallery modes in glass microspheres: optimization of pumping in a modified confocal microscope / L. Martín, P. Haro-González, I. Martín et al. // Optics letters. — 2011. — Vol. 36, no. 5. — Pp. 615–617.
- 134 Polarization splitting of optical resonant modes in a- s i: H/a- sio x: H microcavities / A. Dukin, N. Feoktistov, V. Golubev et al. // Physical Review E. — 2003. — Vol. 67, no. 4. — P. 046602.
- 135 Расщепление резонансных оптических мод в микрорезонаторах Фабри-Перо / . Голубев, . Дукин, . Медведев et al. // Физика и техника полупроводников. — 2003. — Vol. 37, no. 7. — Pp. 860–865.
- 136 Chowdhury D., Leach D., Chang R. Effect of the goos-hänchen shift on the geometrical-optics model for spherical-cavity mode spacing // JOSA A. — 1994. — Vol. 11, no. 3. — Pp. 1110–1116.
- 137 Люминесцентные свойства искусственного опала / . Грузинцев, . Емельченко, . Масалов et al. // Неорганические материалы. — 2008. — Vol. 44, no. 2. — Pp. 203–209.
- 138 Nelder J. A., Mead R. A simplex method for function minimization // The computer journal. — 1965. — Vol. 7, no. 4. — Pp. 308–313.
- 139 Effect of a dielectric substrate on whispering-gallery-mode sensors / N. Le Thomas, U. Woggon, W. Langbein, M. V. Artemyev // JOSA B. — 2006. — Vol. 23, no. 11. — Pp. 2361–2365.
- 140 Heavy photon states in photonic chains of resonantly coupled cavities with supermonodispersive microspheres / Y. Hara, T. Mukaiyama, K. Takeda, M. Kuwata-Gonokami // Physical Review Letters. — 2005. — Vol. 94, no. 20. — P. 203905.
- 141 Binnig G., Quate C. F., Gerber C. Atomic force microscope // Physical review letters. — 1986. — Vol. 56, no. 9. — P. 930.

- 142 Thermal and ambient-induced deflections of scanning force microscope cantilevers / T. Thundat, R. J. Warmack, G. Chen, D. Allison // Applied Physics Letters. — 1994. — Vol. 64, no. 21. — Pp. 2894–2896.
- 143 A femtojoule calorimeter using micromechanical sensors / J. Barnes, R. Stephenson, C. Woodburn et al. // Review of Scientific Instruments. — 1994. — Vol. 65, no. 12. — Pp. 3793–3798.
- 144 Detection of mercury vapor using resonating microcantilevers / T. Thundat, E. Wachter, S. Sharp, R. Warmack // Applied Physics Letters. — 1995. — Vol. 66, no. 13. — Pp. 1695–1697.
- 145 Vapor detection using resonating microcantilevers / T. Thundat, G. Chen, R. Warmack et al. // Analytical Chemistry. — 1995. — Vol. 67, no. 3. — Pp. 519–521.
- 146 Gold nano-structures for transduction of biomolecular interactions into micrometer scale movements / N. V. Lavrik, C. A. Tipple, M. J. Sepaniak, P. G. Datskos // Biomedical Microdevices. — 2001. — Vol. 3, no. 1. — Pp. 35–44.
- 147 Moulin A., O'shea S., Welland M. Microcantilever-based biosensors // Ultramicroscopy. — 2000. — Vol. 82, no. 1. — Pp. 23–31.
- 148 Micromachined silicon tunnel sensor for motion detection / T. Kenny, S. Waltman, J. Reynolds, W. Kaiser // Applied physics letters. — 1991. — Vol. 58, no. 1. — Pp. 100–102.
- 149 Scheible D. V., Erbe A., Blick R. H. Dynamic control and modal analysis of coupled nano-mechanical resonators // Applied physics letters. — 2003. — Vol. 82, no. 19. — Pp. 3333–3335.
- 150 Scanning force microscopy in the dynamic mode using microfabricated capacitive sensors / N. Blanc, J. Brugger, N. De Rooij, U. Dürig // Journal of Vacuum Science & Technology B: Microelectronics and Nanometer Structures Processing, Measurement, and Phenomena. — 1996. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 901–905.

- 151 Fabrication and characterization of cantilevers with integrated sharp tips and piezoelectric elements for actuation and detection for parallel afm applications / P.-F. Indermühle, G. Schürmann, G.-A. Racine, N. De Rooij // Sensors and Actuators A: Physical. — 1997. — Vol. 60, no. 1. — Pp. 186–190.
- 152 Gotszalk T., Grabiec P., Rangelow I. W. Piezoresistive sensors for scanning probe microscopy // Ultramicroscopy. — 2000. — Vol. 82, no. 1. — Pp. 39–48.
- 153 Meyer G., Amer N. M. Novel optical approach to atomic force microscopy // Applied physics letters. — 1988. — Vol. 53, no. 12. — Pp. 1045–1047.
- 154 Atomic force microscopy using optical interferometry / R. Erlandsson, G. McClelland, C. Mate, S. Chiang // Journal of Vacuum Science & Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films. — 1988. — Vol. 6, no. 2. — Pp. 266–270.
- 155 Measuring magnetic susceptibilities of nanogram quantities of materials using microcantilevers / E. Finot, T. Thundat, E. Lesniewska, J. P. Goudonnet // Ultramicroscopy. — 2001. — Vol. 86, no. 1. — Pp. 175–180.
- 156 Microcantilever charged-particle flux detector / A. Stephan, T. Gaulden, A.-D. Brown et al. // Review of scientific instruments. — 2002. — Vol. 73, no. 1. — Pp. 36–41.
- 157 Photomechanical chemical microsensors / P. Datskos, M. Sepaniak, C. Tipple, N. Lavrik // Sensors and Actuators B: Chemical. — 2001. — Vol. 76, no. 1. — Pp. 393–402.
- 158 Surface stress in the self-assembly of alkanethiols on gold / R. Berger, E. Delamarche, H. P. Lang et al. // Science. — 1997. — Vol. 276, no. 5321. — Pp. 2021–2024.
- 159 Stress at the solid- liquid interface of self-assembled monolayers on gold investigated with a nanomechanical sensor / J. Fritz, M. Baller, H. Lang et al. // Langmuir. — 2000. — Vol. 16, no. 25. — Pp. 9694–9696.

- 160 Steffanson M., Rangelow I. Microthermomechanical infrared sensors // Opto-Electronics Review. — 2014. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 1–15.
- 161 Thz imaging and sensing for security applications—explosives, weapons and drugs / J. F. Federici, B. Schulkin, F. Huang et al. // Semiconductor Science and Technology. — 2005. — Vol. 20, no. 7. — P. S266.
- 162 Reflective terahertz imaging of porcine skin burns / Z. Taylor, R. Singh, M. Culjat et al. // Optics letters. — 2008. — Vol. 33, no. 11. — Pp. 1258–1260.
- 163 Ratcliff G. C., Erie D. A., Superfine R. Photothermal modulation for oscillating mode atomic force microscopy in solution // Applied physics letters. — 1998. — Vol. 72, no. 15. — Pp. 1911–1913.
- 164 Resonant tuning fork detector for thz radiation / U. Willer, A. Pohlkütter, W. Schade et al. // Optics express. — 2009. — Vol. 17, no. 16. — Pp. 14069–14074.
- 165 Resonant tuning fork detector for electromagnetic radiation / A. Pohlkötter, U. Willer, C. Bauer, W. Schade // Applied optics. — 2009. — Vol. 48, no. 4. — Pp. B119–B125.
- 166 Gradient and scattering forces in photoinduced force microscopy / J. Jahng, J. Brocious, D. A. Fishman et al. // Physical Review B. — 2014. — Vol. 90, no. 15. — P. 155417.
- 167 Optical binding in scanning probe microscopy / A. Dereux, C. Girard, O. Martin, M. Devel // EPL (Europhysics Letters). — 1994. — Vol. 26, no. 1. — P. 37.
- 168 Optically induced forces in scanning probe microscopy / D. C. Kohlgraf-Owens, S. Sukhov, L. Greusard et al. // Nanophotonics. — 2014. — Vol. 3, no. 1-2. — Pp. 105–116.
- 169 Kohlgraf-Owens D. C., Sukhov S., Dogariu A. Mapping the mechanical action of light // Physical Review A. — 2011. — Vol. 84, no. 1. — P. 011807.
- 170 Laser induced light-force interaction in the optical near-field region /

- X. Zhu, Y. Ling, G. Huang et al. // Chinese physics letters. — 1998. — Vol. 15, no. 3. — Pp. 165–167.
- 171 Lienau C., Richter A., Elsaesser T. Light-induced expansion of fiber tips in near-field scanning optical microscopy // Applied physics letters. — 1996. — Vol. 69, no. 3. — Pp. 325–327.
- 172 La Rosa A. H., Yakobson B., Hallen H. Origins and effects of thermal processes on near-field optical probes // Applied Physics Letters. — 1995. — Vol. 67, no. 18. — Pp. 2597–2599.
- 173 Erickson E. S., Dunn R. C. Sample heating in near-field scanning optical microscopy // Applied Physics Letters. — 2005. — Vol. 87, no. 20. — P. 201102.
- 174 Nonnenmacher M., Wickramasinghe H. Optical absorption spectroscopy by scanning force microscopy // Ultramicroscopy. — 1992. — Vol. 42. — Pp. 351–354.
- 175 Linear and nonlinear optical spectroscopy at the nanoscale with photoinduced force microscopy / J. Jahng, D. A. Fishman, S. Park et al. // Accounts of chemical research. — 2015. — Vol. 48, no. 10. — Pp. 2671–2679.
- 176 Fabrication and characterization of nanoresonating devices for mass detection / Z. J. Davis, G. Abadal, O. Kuhn et al. // Journal of Vacuum Science & Technology B: Microelectronics and Nanometer Structures Processing, Measurement, and Phenomena. — 2000. — Vol. 18, no. 2. — Pp. 612–616.
- 177 Hiebert W. Mass sensing: Devices reach single-proton limit // Nature nanotechnology. — 2012. — Vol. 7, no. 5. — Pp. 278–280.
- 178 Datskos P. G., Sauers I. Detection of 2-mercaptoethanol using gold-coated micromachined cantilevers // Sensors and Actuators B: Chemical. — 1999. — Vol. 61, no. 1. — Pp. 75–82.
- 179 Multiple-input microcantilever sensors / C. Britton, R. Jones, P. Oden et al. // Ultramicroscopy. — 2000. — Vol. 82, no. 1. — Pp. 17–21.



- 180 A cantilever array-based artificial nose / M. Baller, H. Lang, J. Fritz et al. // Ultramicroscopy. — 2000. — Vol. 82, no. 1. — Pp. 1–9.
- 181 Sensitive detection of plastic explosives with self-assembled monolayer-coated microcantilevers / L. Pinnaduwege, V. Boiadjev, J. Hawk, T. Thundat // Applied Physics Letters. — 2003. — Vol. 83, no. 7. — Pp. 1471–1473.
- 182 Environmental sensors based on micromachined cantilevers with integrated read-out / A. Boisen, J. Thaysen, H. Jensenius, O. Hansen // Ultramicroscopy. — 2000. — Vol. 82, no. 1. — Pp. 11–16.
- 183 Piezoelectrically activated resonant bridge microaccelerometer / D. Hicks, S. Chang, M. Putty, D. Eddy // Proc. 1994 Solid-State Sensors Actuators Workshop. — 1994. — Pp. 225–228.
- 184 A piezoelectric-plate microgyroscope / G. He, C. Nguyen, J. Hui et al. // Solid State Sensors and Actuators, 1997. TRANSDUCERS'97 Chicago., 1997 International Conference on / IEEE. — Vol. 2. — 1997. — Pp. 895–898.
- 185 Micromachined sensor for in-situ monitoring of wafer state in plasma etching / M. D. Baker, O. Brand, M. G. Allen, G. S. May // Process, Equipment, and Materials Control in Integrated Circuit Manufacturing II / International Society for Optics and Photonics. — Vol. 2876. — 1996. — Pp. 98–107.
- 186 A cmos-compatible device for fluid density measurements / D. Westberg, O. Paul, G. I. Andersson, H. Baltes // Micro Electro Mechanical Systems, 1997. MEMS'97, Proceedings, IEEE., Tenth Annual International Workshop on / IEEE. — 1997. — Pp. 278–283.
- 187 Micromachined viscosity sensor for real-time polymerization monitoring / O. Brand, J. M. English, S. A. Bidstrup, M. G. Allen // Solid State Sensors and Actuators, 1997. TRANSDUCERS'97 Chicago., 1997 International Conference on / IEEE. — Vol. 1. — 1997. — Pp. 121–124.
- 188 Eyre B., Pister K. S. Micromechanical resonant magnetic sensor in standard cmos // Solid State Sensors and Actuators, 1997. TRANSDUCERS'97

- Chicago., 1997 International Conference on / IEEE. — Vol. 1. — 1997. — Pp. 405–408.
- 189 Silicon pressure sensor integrates resonant strain gauge on diaphragm / K. Ikeda, H. Kuwayama, T. Kobayashi et al. // Sensors and Actuators A: Physical. — 1990. — Vol. 21, no. 1-3. — Pp. 146–150.
- 190 Brand O., Baltes H. Micromachined resonant sensors—an overview // Sensors update. — 1998. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 3–51.
- 191 Fabrication and packaging of a resonant infrared sensor integrated in silicon / C. Cabuz, S. Shoji, K. Fukatsu et al. // Sensors and Actuators A: Physical. — 1994. — Vol. 43, no. 1. — Pp. 92–99.
- 192 Application of micromachined *y*-cut-quartz bulk acoustic wave resonator for infrared sensing / M. B. Pisani, K. Ren, P. Kao, S. Tadigadapa // Journal of Microelectromechanical Systems. — 2011. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 288–296.
- 193 Hui Y., Rinaldi M. Fast and high resolution thermal detector based on an aluminum nitride piezoelectric microelectromechanical resonator with an integrated suspended heat absorbing element // Applied Physics Letters. — 2013. — Vol. 102, no. 9. — P. 093501.
- 194 Gokhale V. J., Rais-Zadeh M. Uncooled infrared detectors using gallium nitride on silicon micromechanical resonators // Journal of Microelectromechanical Systems. — 2014. — Vol. 23, no. 4. — Pp. 803–810.
- 195 Hui Y., Rinaldi M. Mems resonant infrared sensors // Encyclopedia of Nanotechnology. — 2016. — Pp. 1–9.
- 196 Uncooled bimaterial cantilever for infrared detection based on resonant frequency tracking / Z. Danqi, Z. Xia, L. Peng et al. // Micro & Nano Letters. — 2012. — Vol. 7, no. 5. — Pp. 434–438.
- 197 Characterization of vibration-type infrared thermal detector on temperature, light, and thermal infrared / J.-H. Jeong, S. Kumagai, I. Yamashita et al. // Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS), 2015 Transducers-2015 18th International Conference on / IEEE. — 2015. — Pp. 2061–2064.

- 198 Optomechanical uncooled infrared imaging system: design, microfabrication, and performance / Y. Zhao, M. Mao, R. Horowitz et al. // Journal of microelectromechanical systems. — 2002. — Vol. 11, no. 2. — Pp. 136–146.
- 199 Datskos P., Lavrik N., Rajic S. Performance of uncooled microcantilever thermal detectors // Review of Scientific Instruments. — 2004. — Vol. 75, no. 4. — Pp. 1134–1148.
- 200 Impact of silicon nitride thickness on the infrared sensitivity of silicon nitride–aluminum microcantilevers / M. R. Rosenberger, B. Kwon, D. G. Cahill, W. P. King // Sensors and Actuators A: Physical. — 2012. — Vol. 185. — Pp. 17–23.
- 201 Detection of pulsed far-infrared and terahertz light with an atomic force microscope / J.-M. Ortega, F. Glotin, R. Prazeres et al. // Applied Physics Letters. — 2012. — Vol. 101, no. 14. — P. 141117.
- 202 Near field imaging of a semiconductor laser by scanning probe microscopy without a photodetector / M. Dunaevskiy, P. Alekseev, A. Baranov et al. // Applied Physics Letters. — 2013. — Vol. 103, no. 5. — P. 053120.
- 203 New scanning probe microscopy near-field imaging method for laser radiation intensity mapping / P. Alekseev, M. Dunaevskiy, A. Monahov et al. // Laser Optics, 2014 International Conference / IEEE. — 2014. — Pp. 1–1.
- 204 See <http://www.nanosensors.com/pointprobe-plus-force-modulation-mode-reflex-coating-afm-tip-ppp-fmr>.
- 205 Low-frequency fluctuations in semiconductor ring lasers with optical feedback / L. Mashal, R. M. Nguimdo, G. Van der Sande et al. // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 2013. — Vol. 49, no. 9. — Pp. 790–797.
- 206 Bandwidth and unpredictability properties of semiconductor ring lasers with chaotic optical injection / N. Li, W. Pan, S. Xiang et al. // Optics & Laser Technology. — 2013. — Vol. 53. — Pp. 45–50.

- 207 Kingni S. T., Woafu P. Theoretical investigation of a semiconductor ring laser driven by chua's oscillator // Journal of Modern Optics. — 2013. — Vol. 60, no. 11. — Pp. 869–879.
- 208 Enhanced chaos synchronization and communication in cascade-coupled semiconductor ring lasers / N. Li, W. Pan, L. Yan et al. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2014. — Vol. 19, no. 6. — Pp. 1874–1883.
- 209 Fast random bits generation based on a single chaotic semiconductor ring laser / R. M. Nguimdo, G. Verschaffelt, J. Danckaert et al. // Optics express. — 2012. — Vol. 20, no. 27. — Pp. 28603–28613.
- 210 Tang D., Dykstra R., Heckenberg N. Antiphase dynamics in an optically pumped bidirectional ring laser // Optics communications. — 1996. — Vol. 126, no. 4-6. — Pp. 318–325.
- 211 Roy R., Mandel L. Optical bistability and first order phase transition in a ring dye laser // Optics Communications. — 1980. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 133–136.
- 212 Oscillation regimes of a solid-state ring laser with active beat-note stabilization: From a chaotic device to a ring-laser gyroscope / S. Schwartz, G. Feugnet, E. Lariontsev, J.-P. Pocholle // Physical Review A. — 2007. — Vol. 76, no. 2. — P. 023807.
- 213 Pyragas K. Delayed feedback control of chaos // Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2006. — Vol. 364, no. 1846. — Pp. 2309–2334.
- 214 Liu M.-K., Suh C. S. Simultaneous time–frequency control of bifurcation and chaos // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2012. — Vol. 17, no. 6. — Pp. 2539–2550.
- 215 Ermakov I. V., Van der Sande G., Danckaert J. Semiconductor ring laser subject to delayed optical feedback: bifurcations and stability // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2012. — Vol. 17, no. 12. — Pp. 4767–4779.

- 216 Alternate oscillations in semiconductor ring lasers / M. Sorel, P. Laybourn, A. Scirè et al. // Optics letters. — 2002. — Vol. 27, no. 22. — Pp. 1992–1994.
- 217 Square-wave oscillations in semiconductor ring lasers with delayed optical feedback / L. Mashal, G. Van der Sande, L. Gelens et al. // Optics express. — 2012. — Vol. 20, no. 20. — Pp. 22503–22516.
- 218 Square-wave oscillations in a semiconductor ring laser subject to counter-directional delayed mutual feedback / S.-S. Li, X.-Z. Li, J.-P. Zhuang et al. // Optics letters. — 2016. — Vol. 41, no. 4. — Pp. 812–815.
- 219 Rozanov N. N. Kinetics of a solid-state laser with an additional moving mirror // Soviet Journal of Quantum Electronics. — 1975. — Vol. 4, no. 10. — P. 1191.
- 220 Lang R., Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // IEEE journal of Quantum Electronics. — 1980. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 347–355.
- 221 Self-modulation at ghz frequencies of a diode laser coupled to an external cavity / R. Broom, E. Mohn, C. Risch, R. Salathé // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). — 1969. — Vol. 20, no. 6. — Pp. 995–995.
- 222 External-cavity-induced nonlinearities in the light versus current characteristic of (ga, al) as continuous-wave diode lasers / C. Risch, C. Voumard, F. Reinhart, R. Salathe // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 1977. — Vol. 13, no. 8. — Pp. 692–696.
- 223 Low-frequency noise characteristics of channel substrate planar gaalas laser diodes / R. Miles, A. Dandridge, A. Tveten et al. // Applied Physics Letters. — 1981. — Vol. 38, no. 11. — Pp. 848–850.
- 224 Stubkjaer K., Small M. Feedback-induced noise in index-guided semiconductor lasers and its reduction by modulation // Electronics Letters. — 1983. — Vol. 19, no. 10. — Pp. 388–390.
- 225 Control of optical-feedback-induced laser intensity noise in optical data

- recording / G. R. Gray, A. T. Ryan, G. P. Agrawal, E. C. Gage // Optical Engineering. — 1993. — Vol. 32, no. 4. — Pp. 739–746.
- 226 Feedback induced instabilities in a quantum dot semiconductor laser / O. Carroll, I. O’Driscoll, S. P. Hegarty et al. // Optics express. — 2006. — Vol. 14, no. 22. — Pp. 10831–10837.
- 227 Lenstra D., Verbeek B., Den Boef A. Coherence collapse in single-mode semiconductor lasers due to optical feedback // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 1985. — Vol. 21, no. 6. — Pp. 674–679.
- 228 Study of the single-mode injection laser / A. Bogatov, P. Eliseev, L. Ivanov et al. // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 1973. — Vol. 9, no. 2. — Pp. 392–394.
- 229 Erneux T., Glorieux P. Laser dynamics. — Cambridge University Press, 2010.
- 230 Otsuka K. Nonlinear dynamics in optical complex systems. — Springer Science & Business Media, 2000. — Vol. 7.
- 231 Roelfsema Pieter R. A. K. E. P. K., Singer W. Visuomotor integration is associated with zero time-lag synchronization among cortical areas // Nature. — 1997. — Vol. 385. — P. 157.
- 232 Zero-lag long-range synchronization via dynamical relaying / I. Fischer, R. Vicente, J. M. Buldú et al. // Physical review letters. — 2006. — Vol. 97, no. 12. — P. 123902.
- 233 Dynamical relaying can yield zero time lag neuronal synchrony despite long conduction delays / R. Vicente, L. L. Gollo, C. R. Mirasso et al. // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2008. — Vol. 105, no. 44. — Pp. 17157–17162.
- 234 Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor / I. Kanter, M. Zigzag, A. Englert et al. // EPL (Europhysics Letters). — 2011. — Vol. 93, no. 6. — P. 60003.
- 235 Colet P., Roy R. Digital communication with synchronized chaotic lasers // Optics letters. — 1994. — Vol. 19, no. 24. — Pp. 2056–2058.

- 236 Goedgebuer J.-P., Larger L., Porte H. Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode // Physical Review Letters. — 1998. — Vol. 80, no. 10. — P. 2249.
- 237 VanWiggeren G. D., Roy R. Communication with chaotic lasers // Science. — 1998. — Vol. 279, no. 5354. — Pp. 1198–1200.
- 238 Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links / A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger et al. // Nature. — 2005. — Vol. 438, no. 7066. — Pp. 343–346.
- 239 Tkach R., Chraplyvy A. Regimes of feedback effects in 1.5- $\mu$ m distributed feedback lasers // Journal of Lightwave technology. — 1986. — Vol. 4, no. 11. — Pp. 1655–1661.
- 240 Henry C., Kazarinov R. Instability of semiconductor lasers due to optical feedback from distant reflectors // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 1986. — Vol. 22, no. 2. — Pp. 294–301.
- 241 Mork J., Tromborg B., Mark J. Chaos in semiconductor lasers with optical feedback: Theory and experiment // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 1992. — Vol. 28, no. 1. — Pp. 93–108.
- 242 Mørk J., Mark J., Tromborg B. Route to chaos and competition between relaxation oscillations for a semiconductor laser with optical feedback // Physical review letters. — 1990. — Vol. 65, no. 16. — P. 1999.
- 243 Hohl A., Gavrielides A. Bifurcation cascade in a semiconductor laser subject to optical feedback // Physical review letters. — 1999. — Vol. 82, no. 6. — P. 1148.
- 244 Tromborg B., Mork J. Stability analysis and the route to chaos for laser diodes with optical feedback // IEEE photonics technology letters. — 1990. — Vol. 2, no. 8. — Pp. 549–552.
- 245 Ye J., Li H., McInerney J. G. Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser with weak optical feedback // Physical Review A. — 1993. — Vol. 47, no. 3. — P. 2249.

- 246 Diode lasers with optical feedback: Stability of the maximum gain mode / A. Levine, G. Van Tartwijk, D. Lenstra, T. Erneux // Physical Review A. — 1995. — Vol. 52, no. 5. — P. R3436.
- 247 Petermann K. External optical feedback phenomena in semiconductor lasers // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. — 1995. — Vol. 1, no. 2. — Pp. 480–489.
- 248 Mork J., Tromborg B., Christiansen P. L. Bistability and low-frequency fluctuations in semiconductor lasers with optical feedback: a theoretical analysis // IEEE journal of quantum electronics. — 1988. — Vol. 24, no. 2. — Pp. 123–133.
- 249 Sano T. Antimode dynamics and chaotic itinerancy in the coherence collapse of semiconductor lasers with optical feedback // Physical Review A. — 1994. — Vol. 50, no. 3. — P. 2719.
- 250 Heil T., Fischer I., Elsässer W. Influence of amplitude-phase coupling on the dynamics of semiconductor lasers subject to optical feedback // Physical Review A. — 1999. — Vol. 60, no. 1. — P. 634.
- 251 Ries R., Sporleder F. Low frequency instabilities of laser diodes with optical feedback // Proc. 8th ECOC. — 1982. — Pp. 285–290.
- 252 Observation of chaotic itinerancy in the light and carrier dynamics of a semiconductor laser with optical feedback / W. Ray, W.-S. Lam, P. N. Guzdar, R. Roy // Physical Review E. — 2006. — Vol. 73, no. 2. — P. 026219.
- 253 Jiang S., Dagenais M., Morgan R. A. Spectral characteristics of vertical-cavity surface-emitting lasers with strong external optical feedback // IEEE photonics technology letters. — 1995. — Vol. 7, no. 7. — Pp. 739–741.
- 254 Fujiwara N., Takiguchi Y., Ohtsubo J. Observation of the synchronization of chaos in mutually injected vertical-cavity surface-emitting semiconductor lasers // Optics letters. — 2003. — Vol. 28, no. 18. — Pp. 1677–1679.
- 255 Sondermann M., Ackemann T. Correlation properties and drift phenomena



- in the dynamics of vertical-cavity surface-emitting lasers with optical feedback // Optics express. — 2005. — Vol. 13, no. 7. — Pp. 2707–2715.
- 256 Dynamics of vertical-cavity surface-emitting lasers in the short external cavity regime: Pulse packages and polarization mode competition / A. Tabaka, M. Peil, M. Sciamanna et al. // Physical Review A. — 2006. — Vol. 73, no. 1. — P. 013810.
- 257 Melnik S., Huyet G., Uskov A. V. The linewidth enhancement factor  $\alpha$  of quantum dot semiconductor lasers // Optics Express. — 2006. — Vol. 14, no. 7. — Pp. 2950–2955.
- 258 Coherence collapse and low-frequency fluctuations in quantum-dash based lasers emitting at  $1.57 \mu\text{m}$  / S. Azouigui, B. Kelleher, S. Hegarty et al. // Optics express. — 2007. — Vol. 15, no. 21. — Pp. 14155–14162.
- 259 Observing chaos for quantum-dot microlasers with external feedback / F. Albert, C. Hopfmann, S. Reitzenstein et al. // Nature communications. — 2011. — Vol. 2. — P. 366.
- 260 Tager A. A., Petermann K. High-frequency oscillations and self-mode locking in short external-cavity laser diodes // IEEE journal of quantum electronics. — 1994. — Vol. 30, no. 7. — Pp. 1553–1561.
- 261 Dynamics of semiconductor lasers subject to delayed optical feedback: The short cavity regime / T. Heil, I. Fischer, W. Elsässer, A. Gavrielides // Physical Review Letters. — 2001. — Vol. 87, no. 24. — P. 243901.
- 262 Delay dynamics of semiconductor lasers with short external cavities: Bifurcation scenarios and mechanisms / T. Heil, I. Fischer, W. Elsässer et al. // Physical Review E. — 2003. — Vol. 67, no. 6. — P. 066214.
- 263 Self-organization in semiconductor lasers with ultrashort optical feedback / O. Ushakov, S. Bauer, O. Brox et al. // Physical review letters. — 2004. — Vol. 92, no. 4. — P. 043902.
- 264 Nonlinear dynamics of semiconductor lasers with active optical feedback / S. Bauer, O. Brox, J. Kreissl et al. // Physical Review E. — 2004. — Vol. 69, no. 1. — P. 016206.

- 265 All-optical noninvasive control of unstable steady states in a semiconductor laser / S. Schikora, P. Hövel, H.-J. Wünsche et al. // Physical review letters. — 2006. — Vol. 97, no. 21. — P. 213902.
- 266 Flunkert V., Schöll E. Suppressing noise-induced intensity pulsations in semiconductor lasers by means of time-delayed feedback // Physical Review E. — 2007. — Vol. 76, no. 6. — P. 066202.
- 267 Dahms T., Hövel P., Schöll E. Stabilizing continuous-wave output in semiconductor lasers by time-delayed feedback // Physical Review E. — 2008. — Vol. 78, no. 5. — P. 056213.
- 268 Low frequency fluctuations and multimode operation of a semiconductor laser with optical feedback / G. Huyet, S. Balle, M. Giudici et al. // Optics communications. — 1998. — Vol. 149, no. 4. — Pp. 341–347.
- 269 Picosecond intensity statistics of semiconductor lasers operating in the low-frequency fluctuation regime / D. Sukow, T. Heil, I. Fischer et al. // Physical Review A. — 1999. — Vol. 60, no. 1. — P. 667.
- 270 Viktorov E. A., Mandel P. Low frequency fluctuations in a multimode semiconductor laser with optical feedback // Physical review letters. — 2000. — Vol. 85, no. 15. — P. 3157.
- 271 Dynamics of a semiconductor laser with optical feedback / G. Huyet, J. White, A. Kent et al. // Physical Review A. — 1999. — Vol. 60, no. 2. — P. 1534.
- 272 Complex spatio-temporal dynamics in the near-field of a broad-area semiconductor laser / I. Fischer, O. Hess, W. Elsässer, E. Göbel // EPL (Europhysics Letters). — 1996. — Vol. 35, no. 8. — P. 579.
- 273 Mode formation in broad area quantum dot lasers at 1060 nm / Y. Tanguy, J. Muszalski, J. Houlihan et al. // Optics communications. — 2004. — Vol. 235, no. 4. — Pp. 387–393.
- 274 Winful H. G., Rahman L. Synchronized chaos and spatiotemporal chaos in arrays of coupled lasers // Physical Review Letters. — 1990. — Vol. 65, no. 13. — P. 1575.

- 275 Hess O., Schöll E. Spatio-temporal dynamics in twin-stripe semiconductor lasers // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1994. — Vol. 70, no. 1-2. — Pp. 165–177.
- 276 Injection-induced bifurcations of transverse spatiotemporal patterns in semiconductor laser arrays / D. Merbach, O. Hess, H. Herzel, E. Schöll // Physical Review E. — 1995. — Vol. 52, no. 2. — P. 1571.
- 277 Pattern formation in the transverse section of a laser with a large fresnel number / S. P. Hegarty, G. Huyet, J. G. McInerney, K. Choquette // Physical Review Letters. — 1999. — Vol. 82, no. 7. — P. 1434.
- 278 Picosecond emission dynamics of vertical-cavity surface-emitting lasers: spatial, spectral, and polarization-resolved characterization / A. Barchanski, T. Gensty, C. Degen et al. // IEEE journal of quantum electronics. — 2003. — Vol. 39, no. 7. — Pp. 850–858.
- 279 Mode control and pattern stabilization in broad-area lasers by optical feedback / J. Martin-Regalado, G. Van Tartwijk, S. Balle, M. San Miguel // Physical Review A. — 1996. — Vol. 54, no. 6. — P. 5386.
- 280 Mandre S. K., Fischer I., Elssser W. Control of the spatiotemporal emission of a broad-area semiconductor laser by spatially filtered feedback // Optics letters. — 2003. — Vol. 28, no. 13. — Pp. 1135–1137.
- 281 Chi M., Thestrup B., Petersen P. M. Self-injection locking of an extraordinarily wide broad-area diode laser with a 1000- $\mu\text{m}$ -wide emitter // Optics letters. — 2005. — Vol. 30, no. 10. — Pp. 1147–1149.
- 282 Low phase noise diode laser oscillator for 1s–2s spectroscopy in atomic hydrogen / N. Kolachevsky, J. Alnis, C. G. Parthey et al. // Optics letters. — 2011. — Vol. 36, no. 21. — Pp. 4299–4301.
- 283 Yousefi M., Lenstra D. Dynamical behavior of a semiconductor laser with filtered external optical feedback // IEEE journal of quantum electronics. — 1999. — Vol. 35, no. 6. — Pp. 970–976.
- 284 Detoma E., Tromborg B., Montrosset I. The complex way to laser diode

- spectra: example of an external cavity laser strong optical feedback // IEEE journal of quantum electronics. — 2005. — Vol. 41, no. 2. — Pp. 171–182.
- 285 Characteristics of a semiconductor laser coupled with a fiber bragg grating with arbitrary amount of feedback / A. Naumenko, P. Besnard, N. Loiko et al. // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 2003. — Vol. 39, no. 10. — Pp. 1216–1228.
- 286 Filtered optical feedback induced frequency dynamics in semiconductor lasers / A. P. Fischer, M. Yousefi, D. Lenstra et al. // Physical review letters. — 2004. — Vol. 92, no. 2. — P. 023901.
- 287 Frequency versus relaxation oscillations in a semiconductor laser with coherent filtered optical feedback / H. Erzgräber, B. Krauskopf, D. Lenstra et al. // Physical Review E. — 2006. — Vol. 73, no. 5. — P. 055201.
- 288 Loh W., Ozeki Y., Tang C. L. High-frequency polarization self-modulation and chaotic phenomena in external cavity semiconductor lasers // Applied Physics Letters. — 1990. — Vol. 56, no. 26. — Pp. 2613–2615.
- 289 Stable polarization self-modulation in vertical-cavity surface-emitting lasers / H. Li, A. Hohl, A. Gavrielides et al. // Applied physics letters. — 1998. — Vol. 72, no. 19. — Pp. 2355–2357.
- 290 Te-tm coupled mode dynamics in a semiconductor laser subject to feedback with variably rotated polarization / L. Khaykovich, T. Galfsky, Z. Shotan, N. Gross // Optics Communications. — 2009. — Vol. 282, no. 10. — Pp. 2059–2061.
- 291 Simple and complex square waves in an edge-emitting diode laser with polarization-rotated optical feedback / A. Gavrielides, D. W. Sukow, G. Burner et al. // Physical Review E. — 2010. — Vol. 81, no. 5. — P. 056209.
- 292 Haken H. Laser light dynamics. — North-Holland Amsterdam, 1985. — Vol. 1.
- 293 Mandel P., Agrawal G. P. Mode instabilities in a homogeneously broadened ring laser // Optics Communications. — 1982. — Vol. 42, no. 4. — Pp. 269–274.

- 294 Dynamics of a ring laser with diffusion of active centres / I. Koryukin, P. A. Khandokhin, Y. I. Khanin, P. Mandel // Quantum Electronics. — 1995. — Vol. 25, no. 11. — Pp. 1045–1049.
- 295 Elsgolts L., Norkin S. B. et al. Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments. — Academic Press, 1973. — Vol. 105.
- 296 Transition dipole moment of InAs/InGaAs quantum dots from experiments on ultralow-threshold laser diodes / P. Eliseev, H. Li, A. Stintz et al. // Applied Physics Letters. — 2000. — Vol. 77, no. 2. — Pp. 262–264.