

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. А.Ф. ИОФФЕ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

на правах рукописи

Мыльников Валентин Юрьевич

**КОНИЧЕСКАЯ РЕФРАКЦИЯ ЧАСТИЧНО
КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

специальность: 1.3.3

«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Соколовский Григорий Семенович

Санкт-Петербург — 2024

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1 Современное состояние теории конической рефракции когерентного излучения	13
1.1.Коническая рефракция – явление с почти двухсотлетней историей.....	13
1.2.Теория конической рефракции когерентного излучения	18
1.3.Практические применения конической рефракции.....	30
1.4.Краткие Итоги	33
Глава 2 Бессель-гауссова модель конической рефракции	34
2.1.Краткое введение	34
2.2.Бессель-гауссова модель конической рефракции гауссова пучка	35
2.3.Элегантные лаггерр-гауссовы моды.....	39
2.4.Параметры бессель-гауссовой модели.....	42
2.5.Фокальная плоскость и кольца Поггендорффа.....	47
2.6.Пятна Рамана	49
2.7.Перенормировка параметров бессель-гауссовой модели	53
2.8.Коническая рефракция бессель-гауссовых пучков	56
2.9.Коническая рефракция обобщенных бессель-гауссовых пучков	60
2.10. Краткие итоги	64
Глава 3 Коническая рефракция частично когерентного излучения	66
3.1.Краткое введение	66
3.2.Теория конической рефракции частично когерентного излучения.....	67
3.3.Гауссовский источник модели Шелла	71
3.4.Представление по когерентным модам	72
3.5.Псевдо-модовое представление источника модели Шелла.....	75
3.6.Кольца конической рефракции в фокальной плоскости	81

3.7. Феноменологическая модель конической рефракции частично когерентного излучения	85
3.8. Строгий расчет степени когерентности конусов конической рефракции ..	87
3.9. Дальнее поле конической рефракции частично когерентного излучения ..	98
3.10. Обсуждение результатов	106
3.11. Краткие итоги	110
Заключение	112
Литература	115

Введение

Структурирование света – это активно развивающееся направление современной оптики, связанное с созданием и применением световых полей с управляемой интенсивностью, поляризацией, фазой и когерентностью, а также развитием теоретических подходов к описанию такого рода эффектов [1]. Хорошо известными представителями семейства структурированных пучков являются оптические вихри, обладающие ненулевым орбитальным угловым моментом, а также векторные пучки, характеризующиеся неоднородным в пространстве распределением поляризации. Одним из способов создания структурированного света является коническая рефракция [2]. Данное явление возникает при прохождении луча света вдоль одной из оптических осей двуосного кристалла. В результате, внутри кристалла идеально коллимированный луч преломится по полному световому конусу, а на выходе из кристалла будет наблюдаться полый световой цилиндр.

Можно выделить три основных характеристики конической рефракции, которые привлекают к себе активное внимание научного сообщества. Во-первых, коническая рефракция обладает нестандартной пространственной эволюцией [3]. Данное свойство используется для микроскопии высокого разрешения [4,5], создания лазеров на основе конической рефракции [6,7], а также для оптического манипулирования и захвата микрочастиц [8,9]. Во-вторых, состояние поляризации пучка конической рефракции непрерывно изменяется в плоскости [10]. Такие пучки называют поляризационно-неоднородными и используют для создания оптических преобразователей поляризации [11], систем мультиплексирования и демultipлексирования [12], формирования моно- или полихроматического структурированного света [13,14], поляриметрических измерений [15,16] и оптических датчиков [17]. И, в-третьих, пучок конической рефракции имеет дробный орбитальный угловой момент [18]. Эта особенность обеспечивает важные практические приложения, такие как генерация и аннигиляция оптических вихрей [19,20], а также генерация суммарных и высших гармоник [21,22]. Примечательно, что, несмотря на почти двухвековую историю данного оптического явления, коническая

рефракция до сих пор привлекает к себе большое внимание и продолжает удивлять множеством новых открытий, а теория этого эффекта остается неполной.

В подавляющем большинстве современных экспериментальных работ по изучению конической рефракции в качестве источника излучения используется газовый или твердотельный лазер. Однако, для практического применения данного явления большой интерес представляет исследование конической рефракции частично когерентного излучения. С практической точки зрения это очень выгодно благодаря свойствам низко когерентных источников света, таких как лазерные диоды и светодиоды, которые просты, компактны и очень экономичны. Кроме того, пространственная когерентность дает дополнительную возможность управлять свойствами света, помимо уникальных поляризационных, фазовых и пространственных характеристик, связанных с конической рефракцией. В результате исследование конической рефракции частично когерентного излучения окажет непосредственное влияние на многие приложения структурированного света с контролем когерентности, включая оптическое когерентное шифрование, оптическую связь в свободном пространстве и профилирование пучка. Однако последовательная теория конической рефракции частично когерентного света к настоящему времени отсутствует.

Сказанное выше обуславливает актуальность темы диссертацию.

Целью работы является теоретическое исследование фундаментальных особенностей конической рефракции излучения с частичной пространственной когерентностью.

Достижение этой цели сводится к решению конкретных **задач**:

1. Построить строгую теорию конической рефракции излучения с частичной пространственной когерентностью.
2. Разработать аналитическую модель конической рефракции лаггерр-гауссовых мод и обобщенных бессель-гауссовых пучков.

3. На основе развитой теории объяснить рост количества темных колец в фокальной плоскости и эффект сближения пятен Рамана при увеличении орбитального углового момента оптического вихря. Рассчитать пространственную эволюцию распределения интенсивности конической рефракции гауссовского источника модели Шелла. Исследовать влияние степени когерентности источника излучения на двух-кольцевое распределение интенсивности в фокальной плоскости и формирование пятен Рамана в дальнем поле.

Научная новизна результатов исследования:

1. Предложена неинтегральная модель конической рефракции, в которой электрическое поле за выходной гранью двуосного кристалла выражается через обобщенные бессель-гауссовы пучки, обладающие простой и наглядной пространственной эволюцией.
2. Теоретически рассмотрена коническая рефракция обобщенных бессель-гауссовых пучков и предсказаны новые эффекты, такие как сдвиг ллойдовской плоскости, инверсия пятен Рамана и формирование бутылочных пучков в дальнем поле.
3. Предложено два метода расчета корреляционных функций конической рефракции частично когерентного света, использующие представление источника излучения по когерентным модам и псевдо-модам. В рамках первого метода корреляционные функции излучения выражаются через суперпозицию интегралов Бельского-Хапалюка-Берри. Второй метод позволяет применить построенную бессель-гауссову модель конической рефракции для описания пространственной эволюции интенсивности конической рефракции частично когерентного излучения.
4. Предсказано, обнаружено и объяснено исчезновение темного кольца Поггендорфа в фокальной плоскости конической рефракции при уменьшении степени пространственной когерентности источника излучения.

5. Дано теоретическое объяснение эффекта сближения пятен Рамана, независимо возникающего при увеличении углового орбитального момента света, росте числовой апертуры и уменьшении степени когерентности падающего на двусный кристалл излучения.
6. Предсказано бездифракционное распространение пучка конической рефракции низко-когерентного излучения в дальнем поле, обусловленное интерференционной фокусировкой.

Практическая и теоретическая значимость работы:

1. Построена теория конической рефракции частично когерентного излучения.
2. Построена простая и наглядная бессель-гауссова модель конической рефракции, математический аппарат которой значительно проще ныне существующих теорий, при том же уровне качественного описания всех характерных особенностей изучаемого явления.
3. В рамках построенной модели объяснен рост количества темных колец в фокальной плоскости и предсказано сближение пятен Рамана при увеличении орбитального углового момента оптического вихря.
4. Выполненный теоретический анализ пространственной эволюции конической рефракции обобщенных бессель-гауссовых пучков позволил объяснить поляризационную структуру конусов конической рефракции и предсказать новый способ формирования световых капельных пучков или оптических капсул.
5. Численно и аналитически рассчитана пространственная эволюция распределения интенсивности пучка конической рефракции гауссовского источника модели Шелла.
6. Предложен новый способ генерации бездифракционных пучков структурированного света при помощи конической рефракции низко-когерентного излучения.

Методология и методы исследования. Результаты, приведённые в диссертации, получены с помощью современных методов теоретической и математической физики. Распространение частично когерентного света в двуосных кристаллах и в свободном пространстве рассматривается с помощью параксиальной оптики и теории оптической когерентности второго порядка. При описании рассматриваемых явлений необходимая точность и надёжность результатов обеспечивается сочетанием аналитических подходов и методов численного моделирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Оптический пучок, формирующийся при конической рефракции пучка Лагерра-Гаусса, может быть теоретически описан при помощи обобщенного векторного бессель-гауссова пучка с эффективной шириной и образующим углом, зависящими соответственно от радиального и орбитального индексов и ширины входного пучка.
2. Расстояние между пятнами Рамана при конической рефракции низкокогерентного света пропорционально длине его когерентности.
3. Ширина поперечного распределения интенсивности пучка конической рефракции низкокогерентного излучения в дальнем поле не зависит от продольной координаты, что проявляется в распространении света без дифракционной расходимости на расстояние, определяемое произведением длины Релея входного пучка на отношение радиуса кольца конической рефракции к его толщине.
4. Степень когерентности, описывающая подавление интерференционного вклада в распределение интенсивности излучения и исчезновение темного кольца Поггендорффа при конической рефракции гауссовского источника модели Шелла, растет пропорционально квадрату длины когерентности при низкой когерентности и увеличивается как функция Гаусса при высокой когерентности.

Апробация работы: Основные результаты работы докладывались на научных семинарах ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН; международных научных конференциях «CLEO/Europe» (Мюнхен 2019, 2021), «Laser Optics» (Санкт-Петербург 2018, 2020, 2022), «Физика.СПб» (Санкт-Петербург 2019), международной зимней школе по физике полупроводников (Санкт-Петербург 2020). Диссертационная работа была выполнена при поддержке гранта фонда развития теоретической физики и математики «Базис» №21-1-5-76-1.

Личный вклад: Основные результаты, представленные в данной диссертации, были получены автором лично. Выбор темы и общего направления исследования, обсуждение и постановка задач осуществлялись совместно с научным руководителем.

Публикации: Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 печатных изданиях, из которых 3 изданы в рекомендованных ВАК научных журналах, входящих в квартиль Q1 по Web of Science и Scopus, а 6 — в тезисах докладов, индексируемых в Web of Science и Scopus.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Каждая глава состоит из собственного введения, основной части и заключения. Диссертация содержит 120 страниц текста, включая 29 рисунка. Список цитируемой литературы содержит 110 наименований.

Во введении раскрыта актуальность проведенных исследований, сформулированы цель, поставлены задачи, излагается научная новизна представляемой работы, сформулированы научные положения, выносимые на защиту.

Первая глава диссертации представляет собой обзор литературы и состоит из трех разделов. В первом разделе проводится обзор исследований, посвященных конической рефракции когерентного излучения. Описываются основные свойства конической рефракции, связанные с фокальной плоскостью (кольца Поггендорффа), пространственной эволюцией (пятна Рамана), поляризационной и вихревой структурой пучка. Во втором разделе приводятся основные положения парак-

сиальной теории конической рефракции Бельского-Хапалюка-Берри [23]. На примере конической рефракции гауссова пучка с линейной и циркулярной поляризацией, а также конической рефракции оптического вихря, обсуждаются характерные особенности распространения когерентного излучения вдоль оптической оси двуосного кристалла. Рассматривается двух-конусная модель конической рефракции [24] и интерференционная природа темного кольца Поггендорффа в фокальной плоскости. В третьем разделе описываются практические применения конической рефракции, связанные с оптическим захватом и манипулированием микрочастицами, лазерами на основе конической рефракции, поляризационной метрологией и генерацией оптических вихрей.

Во **второй главе** диссертации разработана простая и наглядная модель конической рефракции, основную роль в которой играют обобщенные бессель-гауссовы пучки. Математический аппарат модели значительно проще ныне существующих теорий, при том же уровне качественного описания всех характерных особенностей изучаемого явления. Построенная модель позволяет найти наглядное объяснение для новых экспериментальных наблюдений. Особенно, в тех случаях, где использование ранее известной теории затруднено, в связи с ее сложным математическим аппаратом. В §2.1 дается введение в проблему и формулируется план решения задачи. В §2.2 построена бессель-гауссова модель конической рефракции. В рамках построенной модели электрическое поле за выходной гранью кристалла можно выразить через векторные обобщенные бессель-гауссовы пучки. В §2.3 элегантно рассматриваются лаггер-гауссовы моды в качестве полного набора функций, к которым будет применяться бессель-гауссова модель. В §2.4 получена связь между эффективной шириной и углом наклона векторного обобщенного бессель-гауссова пучка и шириной, а также модовыми индексами элегантно лаггер-гауссовой моды. В §2.5 рассматривается распределение интенсивности конической рефракции элегантно лаггер-гауссовой моды в фокальной плоскости и вблизи нее. В рамках полученной бессель-гауссовой модели объяснен переход от классического двух-кольцевого распределения интенсивности к многокольцевому [20,25]. В §2.6

рассматривается распределение интенсивности конической рефракции элегантной лаггер-гауссовой моды в дальнем поле. Предсказывается эффект сближения пятен Рамана при увеличении модовых индексов пучка. В §2.7 обсуждаются границы применимости построенной бессель-гауссовой модели. Тесная взаимосвязь между конической рефракцией и обобщенными бессель-гауссовыми пучками глубже исследуется в §2.8. Рассматривается обобщение построенной бессель-гауссовой модели на случай произвольного бессель-гауссова пучка. В пункте §2.9 рассматривается коническая рефракция обобщенных бессель-гауссовых пучков. Рассчитывается пространственная эволюция и обсуждаются новые эффекты: сдвиг Ллойдовской плоскости, инверсия пятен Рамана и формирование бутылочных пучков. Также с помощью геометрической оптики объясняется формирование поляризационного паттерна конической рефракции.

В третьей главе диссертации проведено теоретическое исследование свойств конической рефракции частично когерентного излучения. В §3.1 дается введение в проблему и формулируется план решения задачи. В §3.2 построена теория конической рефракции частично когерентного излучения, базирующаяся на теории Бельского–Хапалюка–Берри [23], двух-конусной модели конической рефракции [24] и теории оптической когерентности второго порядка [26]. Получено соотношение между взаимной спектральной плотностью падающего на кристалл излучения и матрицей когерентности орбитальных угловых моментов (КОУМ) [27], описывающей корреляции компонент электрического поля с различными орбитальными угловыми моментами. Также получена связь матрицы КОУМ с параметрами Стокса.

В §3.3 рассматривается гауссовский источник модели Шелла. В §3.4 значительно упрощено выражение для матрицы КОУМ конической рефракции гауссовского источника модели Шелла. Для этого использовано представление взаимной спектральной плотности источника через некогерентную суперпозицию полностью когерентных лаггер-гауссовых мод. Однако, представление по когерентным

модам, удобное при проведении численного расчета, не дает интуитивного физического понимания возникающих явлений. Для получения аналитических выражений и соответствующего им физического смысла в §3.5 использовалось псевдомодовое представление гауссовского источника модели Шелла. §3.6 посвящен описанию экспериментов по конической рефракции частично когерентного излучения. В §3.7 построена феноменологическая модель распределения интенсивности пучка конической рефракции частично когерентного излучения в фокальной плоскости. В §3.8 строго обоснована феноменологическая модель конической рефракции частично когерентного излучения. В §3.9 обсуждаются эффекты, возникающие в дальнем поле конической рефракции частично когерентного излучения. В §3.10 обобщаются все предсказанные эффекты для конической рефракцией частично когерентного излучения. В заключении приведены основные результаты работы.

Формулы и рисунки в диссертации нумеруются по главам, нумерация литературы единая для всего текста.

Глава 1 Современное состояние теории конической рефракции когерентного излучения

1.1. Коническая рефракция – явление с почти двухсотлетней историей

Как известно, при распространении излучения в одноосном кристалле наблюдается эффект двулучепреломления. Так, входящий пучок внутри кристалла расщепляется на обыкновенный и необыкновенный луч. Лучи распространяются в кристалле по разным направлениям и имеют взаимно ортогональные состояния линейной поляризации. В двуосных кристаллах (т.е. в кристаллах, в которых все три коэффициента преломления различны) также возможно наблюдать эффект двулучепреломления. Однако, если выбрать направление распространения света вдоль одной из оптических осей кристалла, на выходе из кристалла наблюдается принципиальное изменение картины преломления: луч света преобразуется в полный световой конус внутри кристалла, с угловым раствором $2A = 2((n_2 - n_1)(n_3 - n_2))^{1/2}/n_2$, определяемым коэффициентами преломления кристалла ($n_1 < n_2 < n_3$). На выходе из кристалла излучение преобразуется в полный световой цилиндр, как показано на рис. 1.1.

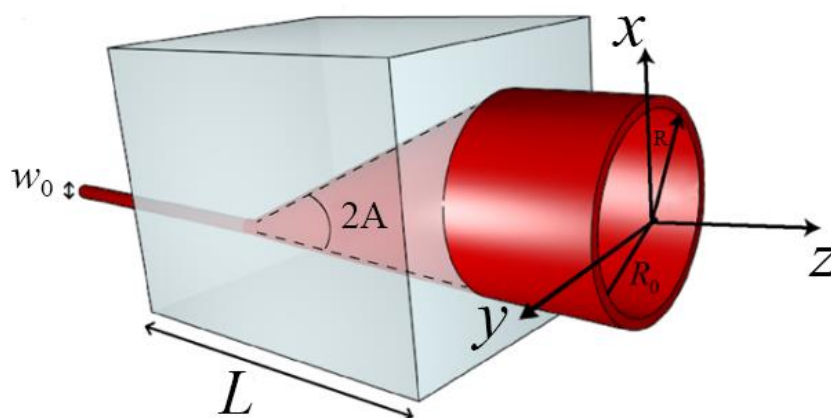


Рисунок 1.1 Пространственная эволюция пучка света, с шириной w_0 , прошедшего вдоль одной из осей двуосного кристалла, с длиной L . Внутри кристалла свет распространяется по полному конусу, с углом раствора $2A$, а на выходе из кристалла будет наблюдаться кольцо с радиусом

$$R_0 = AL [2].$$

Если поместить экран напротив кристалла, то на экране будет наблюдаться яркое кольцо радиуса $R_0 = AL$, где L – длина кристалла. Данное явление было предсказано Уильямом Гамильтоном в 1832 г. и названо конической рефракцией (КР) [28]. Спустя почти год, Хэмфри Ллойд в своих экспериментах впервые экспериментально обнаружил явление конической рефракции [29]. Подобное поведение света при прохождении вдоль оптической оси объясняется особенностью поверхности волновых векторов кристалла, которая вблизи оптической оси имеет вид конуса. В результате, свет преломляется по бесконечному числу направлений, что приводит к формированию конической рефракции.

Необходимо упомянуть, что Гамильтон в своей фундаментальной работе рассматривал распространение плоской волны строго вдоль оптической оси двуосного кристалла. В реальности любой физический пучок состоит из суперпозиции плоских волны, которые могут распространяться под небольшими углами относительно оптической оси. В результате, пучок обладает малым, но конечным углом расходимости. В этом случае, на экране после кристалла будет наблюдаться два ярких кольца, разделенные тонким темным кольцом, названным в честь его первооткрывателя – кольцом Поггендорффа [30] (Рис. 1.2). В первых опытах Ллойда данное темное кольцо не наблюдалось. Позднее, в работах Бира [31] и Хайдингера [32], это явление по неизвестным причинам, также не было обнаружено.

Спустя почти полувек в 1905 году Войгт представил исчерпывающую работу, в которой обсудил все известные на тот момент свойства конической рефракции, подробно проанализировав предшествующую теорию и эксперимент. Он также предложил теоретическое объяснение возникновения темного кольца Поггендорффа в рамках суперпозиции конических световых волн с обыкновенной и необыкновенной поляризацией, которые генерируются двуосным кристаллом [33]. Его интерпретация основана на пропорциональности угла, под которым распространяется излучения на выходе из кристалла, углу падающего на кристалл пучка. И, так как полная энергия волн с нулевым углом распространения равна нулю,

можно сделать вывод, что темное кольцо Поггендорффа объясняется в рамках геометрической оптики. Объяснение Войгта широко распространено в настоящее время и цитируется в учебниках по классической оптике [34], несмотря на то, что подобная интерпретация может привести к появлению темной области внутри любого пучка. Далее мы еще вернемся к обсуждению природы темного кольца Поггендорффа.

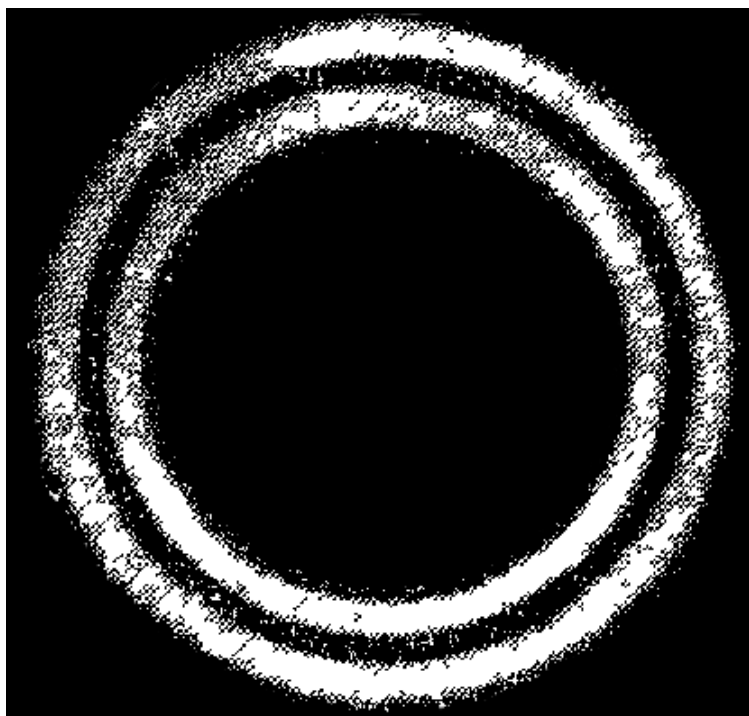


Рисунок 1.2 Распределение интенсивности пучка в фокальной плоскости, на котором отчетливо видно темное кольцо Поггендорффа, расположенное между двух ярких колец.

В 1920-1940х годах Раман опубликовал серию работ по внешней и внутренней конической рефракции [35–37] в кристаллах нафталина. У данного материала эффективность двулучепреломления в десять раз больше, чем у арагонита, который использовался в ранних экспериментах Ллойда и Поггендорффа. Раман подтвердил наличие темного кольца Поггендорффа и изучил поперечное распределение интенсивности вдоль направления распространения излучения (Рис. 1.3). Так, если плоскость наблюдения отодвигать от фокальной (ллойдовской) плоскости, то яркость колец будет становиться все меньше. Достаточно далеко от фокальной плоскости внутреннее кольцо превращается в яркое пятно, которое далее распространяется

вдоль продольной оси. Данное наблюдение стало возможно объяснить только спустя многие десятилетия, когда была создана параксиальная теория конической рефракции.

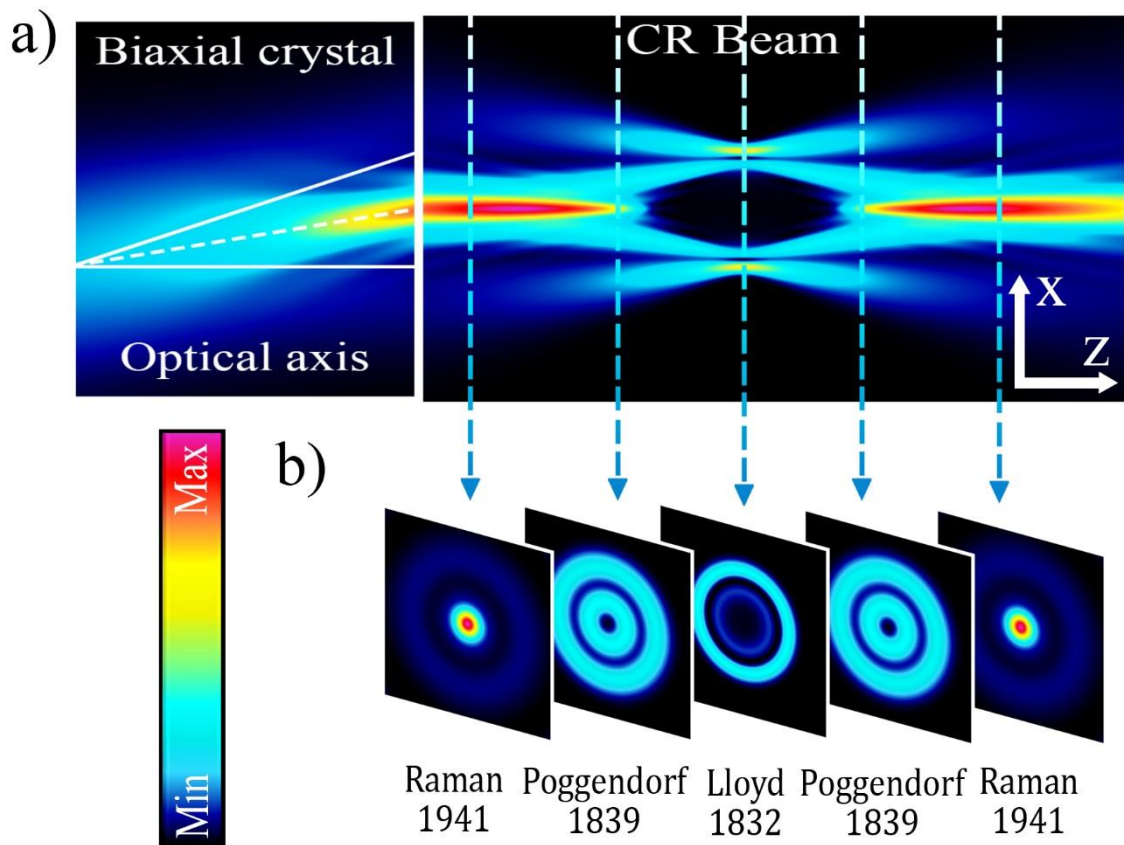


Рисунок 1.3 (а) Пространственная эволюция конической рефракции неполяризованного гауссова пучка внутри кристалла и в свободном пространстве за выходной гранью кристалла. (б) Соответствующие характерные поперечные распределения интенсивности.

Впоследствии, Лалор [38,39] опубликовал две статьи, в которых рассчитал угловое распределение электромагнитного поля, распространяющегося в анизотропном кристалле с точки зрения дифракционной теории. Квинтэссенцией этих двух работ стала статья «Аналитический подход к теории внутренней конической рефракции», в которой преобразование Фурье играло центральную роль для описания конической рефракции [40]. Полученные теоретические предсказания были проверены в экспериментах Перкальска и Михайльченко [41].

В 1978 году Бельский и Хапалюк [42] представили полную параксиальную дифракционную теорию внешней и внутренней конической рефракции в двуосных кристаллах. В этих работах четко установлена связь между новой теорией и выражениями, полученными ранее Лалором, а также представлена элегантная и компактная формулировка теории конической рефракции. В рамках построенного формализма электрическое поле перед кристаллом представляется в виде суперпозиции плоских волн. Каждая волна вследствие двулучепреломления, приобретает свой набег фаз, а на выходе из кристалла, складываясь, волны дают результирующее распределение поля конической рефракции. Предсказанные на основе предложенной теории явления были экспериментально подтверждены в работе Февы и др. [43], в которых использовался кристалл КТР (титанил фосфата калия). Впоследствии, теория Бельского и Хапалюка была расширена в работе [44], а также обобщена на случай гиротропных кристаллов [45]. В этих работах было показано, что параметр $\rho_0 = R_0/w_0$ (R_0 - радиус кольца конической рефракции, w_0 - перетяжка исходного пучка) определяет пространственную эволюцию распределения интенсивности конической рефракции. Также Белафхал в своей работе получил асимптотические ряды, описывающие коническую рефракцию в пределе бесконечно узкого кольца ($\rho_0 \rightarrow \infty$) [46].

Спустя 172 года после того, как Гамильтон впервые предсказал коническую рефракцию, Майкл Берри изящнейшим образом переформулировал теорию Бельского и Хапалюка [23]. Он использовал дифракционную параксиальную оптику и представил действие двуосного кристалла в виде унитарного преобразования над суперпозицией плоских волн, падающих на кристалл. Также в его работе получены аналитические формулы, описывающие двух-кольцевое распределение в Ллойдовской плоскости и пятно Рамана. Работа Берри, вместе с новыми экспериментальными данными, полученными при использовании высококачественного кристалла KGW [47], стали новой отправной точкой для оптики двуосных кристаллов. Бурно начали развиваться практические применения конической рефракции. Наиболее

известны следующие из них: оптическое манипулирование и захват микрочастиц [8,48–51], создание лазеров на основе конической рефракции [6,7,52,53], ее использование в сверхразрешающей микроскопии [54,55].

1.2. Теория конической рефракции когерентного излучения

В этом разделе мы обсудим современную теорию конической рефракции, которая была впервые сформулирована Бельским и Хапалюком [42,56], а затем развита Берри [23]. Центральную роль в предложенном формализме играет электрическое поле излучения, падающего на кристалл. Так, в фокальной плоскости электрическое поле задается вектором $\mathbf{E}^{(0)}(\boldsymbol{\rho})$, где $\boldsymbol{\rho} = \rho[\cos(\varphi), \sin(\varphi)] = \mathbf{r}/w_0$ - поперечный радиус-вектор, нормированный на перетяжку пучка w_0 . Применим преобразование Фурье к электрическому полю исходного светового пучка, представив его в виде суперпозиции плоских волн с безразмерными поперечными волновыми векторами $\mathbf{k} = \kappa[\cos(\theta_\kappa), \sin(\theta_\kappa)]$:

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}(\mathbf{k}) = \int \frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{2\pi} \exp(-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}) \mathbf{E}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}). \quad (1.1)$$

Далее мы будем использовать знак « \sim », чтобы отличать преобразование Фурье функции от самой функции. В результате, электрическое поле результирующего пучка после прохождения через двусный кристалл будет иметь вид [23]:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, \xi) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{2\pi} \exp(i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho} - \frac{1}{2}i\xi\kappa^2) \hat{U}(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}(\mathbf{k}), \quad (1.2)$$

где $\hat{U}(\mathbf{k})$ - унитарное преобразование кристалла конической рефракции над плоской волной с поперечным волновым вектором \mathbf{k} , $\xi = z/k_0w_0^2$ - продольная координата, нормированная на длину Рэлея падающего пучка, k_0 - волновое число света в вакууме. Далее задача будет рассматриваться только в рамках параксиального приближения, когда поперечный волновой вектор много меньше продольного волнового

вектора и распространение света происходит на небольшие углы относительно оптических осей кристалла. Берри было показано, что унитарное преобразование $\hat{U}(\mathbf{k})$, в этом случае, имеет следующий вид [23]:

$$\hat{U}(\mathbf{k}) = \exp(-i\rho_0\mathbf{k}\cdot\mathbf{s}), \quad (1.3)$$

где $\mathbf{s} = (\sigma_3, \sigma_1)$, а σ_3 и σ_1 соответствующие матрицы Паули, $\rho_0 = R_0/w_0$ - нормированный радиус кольца конической рефракции, который играет центральную роль в определении результирующего распределения интенсивности пучка. Можно привести полученное унитарное преобразование (1.3) к более удобному для использования виду:

$$\hat{U}(\mathbf{k}) = \cos(\kappa\rho_0)\hat{I} - i\frac{\sin(\kappa\rho_0)}{\kappa}\mathbf{k}\cdot\mathbf{s}, \quad (1.4)$$

где \hat{I} - единичная матрица 2x2. Подставляя унитарное преобразование (1.4) в выражение для вектора электрического поля (1.2) и переходя в цилиндрические координаты, получим:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, \xi) = \int_0^\infty \kappa d\kappa \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_\kappa}{2\pi} e^{i\kappa\rho\cos(\theta_\kappa-\varphi) - \frac{1}{2}i\xi\kappa^2} \left[\cos(\kappa\rho_0)\hat{I} - i\sin(\kappa\rho_0)\hat{M} \right] \tilde{\mathbf{E}}^{(0)}(\mathbf{k}), \quad (1.5)$$

где M - матрица, смешивающая орбитальные и поляризационные степени свободы пучка:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_\kappa) & \sin(\theta_\kappa) \\ \sin(\theta_\kappa) & -\cos(\theta_\kappa) \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Выражение (1.5), таким образом, задает вид электрического поля пучка конической рефракции для произвольного профиля поля, падающего на кристалл.

В работе Берри [23] далее рассматривается цилиндрически симметричный и однородно поляризованный пучок света с вектором поляризации $\mathbf{e}_{\text{in}} = [d_x, d_y]$. В этом случае, вид падающего на кристалл электрического поля в прямом и обратном

пространстве значительно упрощается, $\mathbf{E}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) = \mathcal{E}(\rho)\mathbf{e}_{in}$ и $\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}(\boldsymbol{\kappa}) = \tilde{\mathcal{E}}(\kappa)\mathbf{e}_{in}$, причем амплитуда поля в обратном пространстве задается преобразованием Ханкеля:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\kappa) = \int_0^{\infty} d\rho \rho \mathcal{E}(\rho) J_0(\kappa\rho), \quad (1.7)$$

где $J_n(x)$ - функция Бесселя порядка n . Так как электрическое поле пучка не зависит от угловой координаты, проинтегрируем по углу θ_κ в выражении (1.5), используя соотношения:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{i\kappa\rho\cos(\theta_\kappa-\varphi)} \frac{d\theta_\kappa}{2\pi} &= J_0(\kappa\rho), \\ \int_0^{2\pi} e^{i\kappa\rho\cos(\theta_\kappa-\varphi)} \cos(\theta_\kappa) \frac{d\theta_\kappa}{2\pi} &= i\cos(\varphi)J_1(\kappa\rho), \\ \int_0^{2\pi} e^{i\kappa\rho\cos(\theta_\kappa-\varphi)} \sin(\theta_\kappa) \frac{d\theta_\kappa}{2\pi} &= i\sin(\varphi)J_1(\kappa\rho), \end{aligned} \quad (1.8)$$

и выразим электрический вектор \mathbf{E} через одномерные интегралы:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, \xi) = \left[B_0(\rho, \xi) \cdot \hat{I} + B_1(\rho, \xi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

где $B_0(\rho, \xi)$ и $B_1(\rho, \xi)$ интегралы Бельского-Хапалука-Берри, которые определяют пространственную эволюцию пучка конической рефракции:

$$\begin{aligned} B_0(\rho, \xi) &= \int_0^{\infty} d\kappa \kappa \tilde{\mathcal{E}}(\kappa) \exp\left(-\frac{1}{2}i\xi\kappa^2\right) \cos(\kappa\rho_0) J_0(\kappa\rho), \\ B_1(\rho, \xi) &= \int_0^{\infty} d\kappa \kappa \tilde{\mathcal{E}}(\kappa) \exp\left(-\frac{1}{2}i\xi\kappa^2\right) \sin(\kappa\rho_0) J_1(\kappa\rho). \end{aligned} \quad (1.10)$$

В предельном случае $\rho_0 \rightarrow 0$ (отсутствие двуосного кристалла) компонента B_0 переходит в исходный пучок $E^{(0)}$, который свободно распространяется вдоль продольной оси ξ , в то время как B_1 стремится к нулю.

Для большей наглядности, Берри также рассмотрел частный случай конической рефракции гауссова пучка. Радиальное распределение электрического поля гауссова пучка и его фурье-образ дается следующими двумя формулами:

$$\mathcal{E}(\rho) = \exp(-\rho^2 / 2), \quad (1.11)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}(\kappa) = \exp(-\kappa^2 / 2). \quad (1.12)$$

Подставляя явный вид профиля электрического поля исходного пучка (1.12) в формулу (1.9) и (1.10), можно получить распределение поля пучка конической рефракции в произвольной точке пространства. На Рис. 1.4 представлен численный расчет распределения интенсивности и электрического поля в фокальной плоскости ($\xi = 0$) для конической рефракции гауссова пучка. В расчете использовалось $\rho_0 \gg 1$, что соответствует хорошо выделенному кольцу.

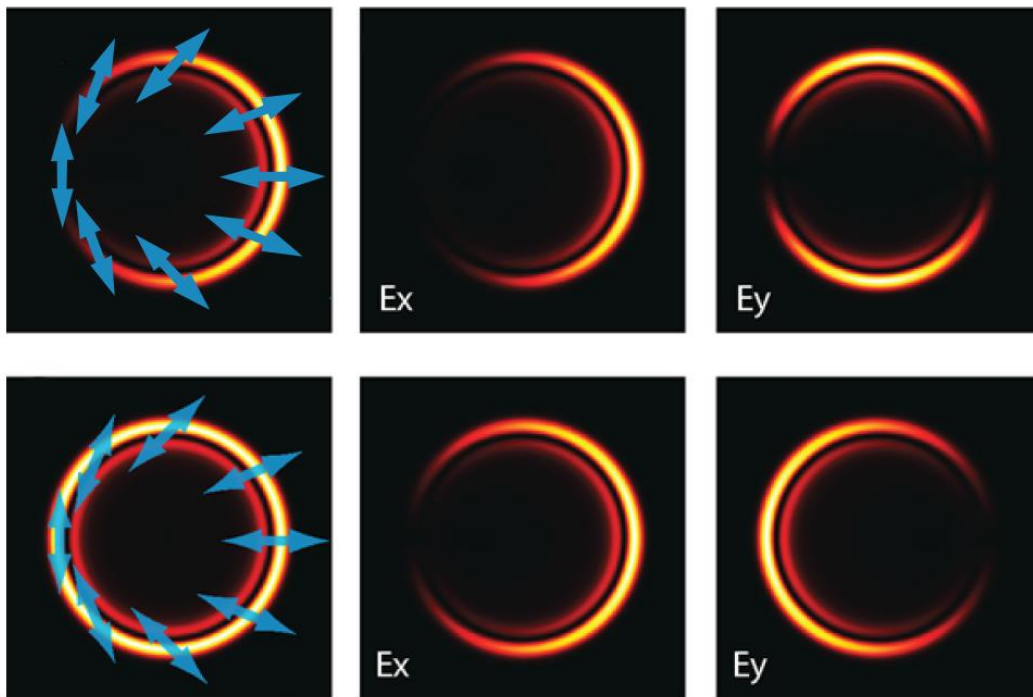


Рисунок 1.4 Характерное распределение интенсивности и электрического поля излучения конической рефракции Гауссова пучка в фокальной плоскости ($\xi = 0$). Исходный пучок перед кристаллом был линейно поляризован вдоль оси x (первая строка), или обладал правой циркулярной поляризацией (вторая строка) [2].

Из Рис. 1.4 видно, что коническая рефракция гауссова пучка обладает нетривиальной поляризационной структурой. В случае однородно поляризованного падающего на кристалл излучения, электрическое поле конической рефракции будет содержать как слагаемые с той же поляризационной структуры как и у исходного пучка (за это в (1.9) отвечает первое слагаемое $\propto B_0$), так и слагаемые с поляризацией зависящей от угла (второе слагаемое в (1.9) $\propto B_1$). В результате, вектор поляризации пучка конической рефракции будет вращаться при изменении угла, как это показано на Рис. 1.4. По этой же причине, интенсивность пучка имеет характерное распределение интенсивности в виде полумесяца для случая линейно поляризованного излучения (первая строка на Рис. 1.4).

Для случая неполяризованного или циркулярно поляризованного света, интенсивность пучка перестает зависеть от угла и может быть представлена в виде суммы двух компонент:

$$I(\boldsymbol{\rho}, \xi) = |\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, \xi)|^2 = |B_0(\boldsymbol{\rho}, \xi)|^2 + |B_1(\boldsymbol{\rho}, \xi)|^2. \quad (1.13)$$

Перейдем к описанию пространственной эволюции конической рефракции гауссова пучка. На рис. 1.5 продемонстрировано продольное распределение интенсивности неполяризованного излучения, численно рассчитанное по (1.13), а также продольные распределения интенсивности отдельных компонент поля $|B_0|^2$ и $|B_1|^2$. В фокальной (Ллойдовской) плоскости ($\xi = 0$) $B_0 \approx B_1$, поэтому мы можем наблюдать на всех трех рассчитанных распределениях характерное двух-кольцевое распределение интенсивности. В свою очередь, в области дальнего поля ($\xi \gg 1, \rho \ll \rho_0$), где происходит формирование пятен Рамана, компоненты излучения конической рефракции $B_0 \approx J_0(\rho\rho_0/\xi)$ и $B_1 \approx J_1(\rho\rho_0/\xi)$. Поэтому, вблизи оси пространства формируются пучки Бесселя нулевого (Рис. 1.5(b)), и первого (Рис. 1.5(c)) порядка. Сумма интенсивностей бесселевых пучков приводит к наложению двух интерференционных картин, поэтому, на Рис. 1.5(a) мы видим два ярких пятна Рамана в дальнем поле.

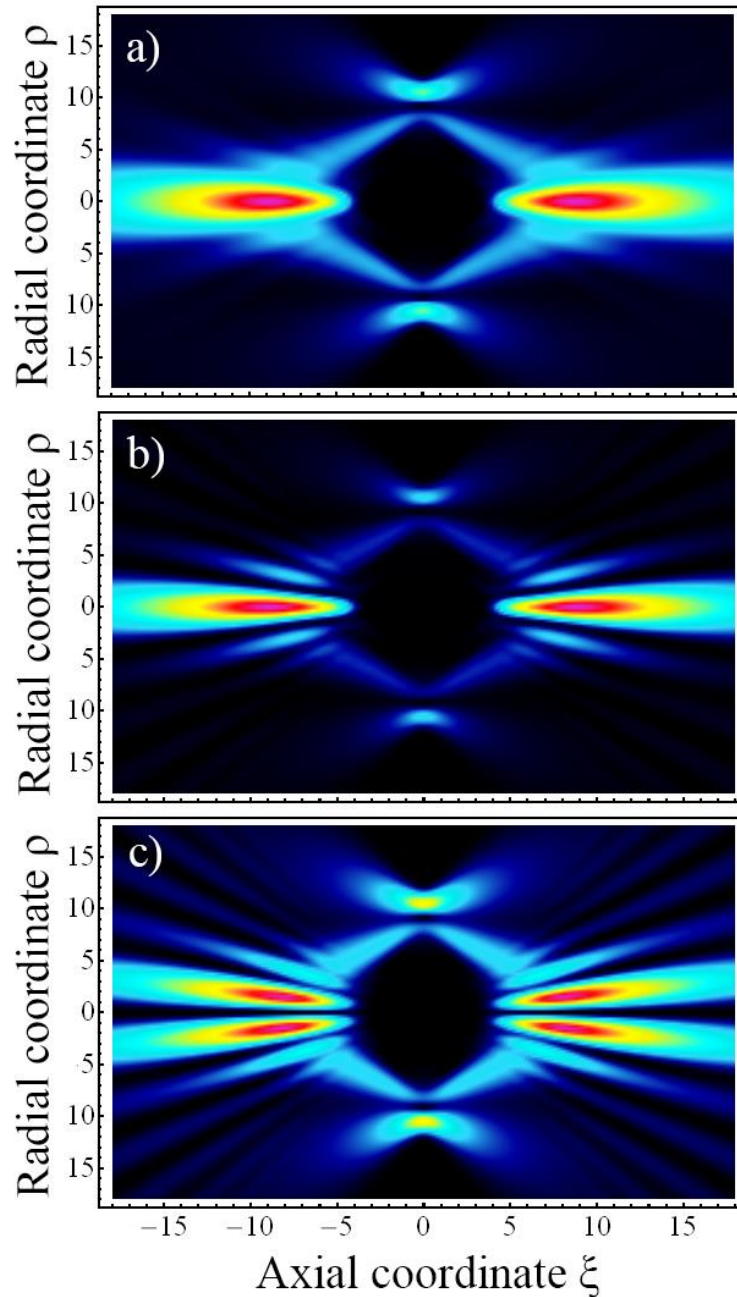


Рисунок 1.5 (а) Пространственная эволюция интенсивности конической рефракции гауссова пучка при значении параметра $\rho_0=10$. Рисунки (b) и (c) соответствуют распределению интенсивности компонент V_0 и V_1 , соответственно.

Теперь перейдем к рассмотрению конической рефракции оптических вихрей с оптическим зарядом равным ℓ . В работе Пита [25] было показано, что использование оптических вихрей позволяет добиться неожиданного изменения свойств излучения конической рефракции. Рассмотрим простейшие оптические вихри, электрическое поле которых в фокальной плоскости имеет вид:

$$\mathbf{E}_\ell^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) = \rho^{|\ell|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2} + i\ell\varphi\right) \mathbf{e}_{in}. \quad (1.14)$$

Из формулы (1.14) видно, что для оптического заряда ℓ неравного нулю, в центре пучка возникает провал интенсивности, а фаза пучка начинает зависеть от угла. Более наглядно основные свойства простейших оптических вихрей показаны на Рис. 1.6.

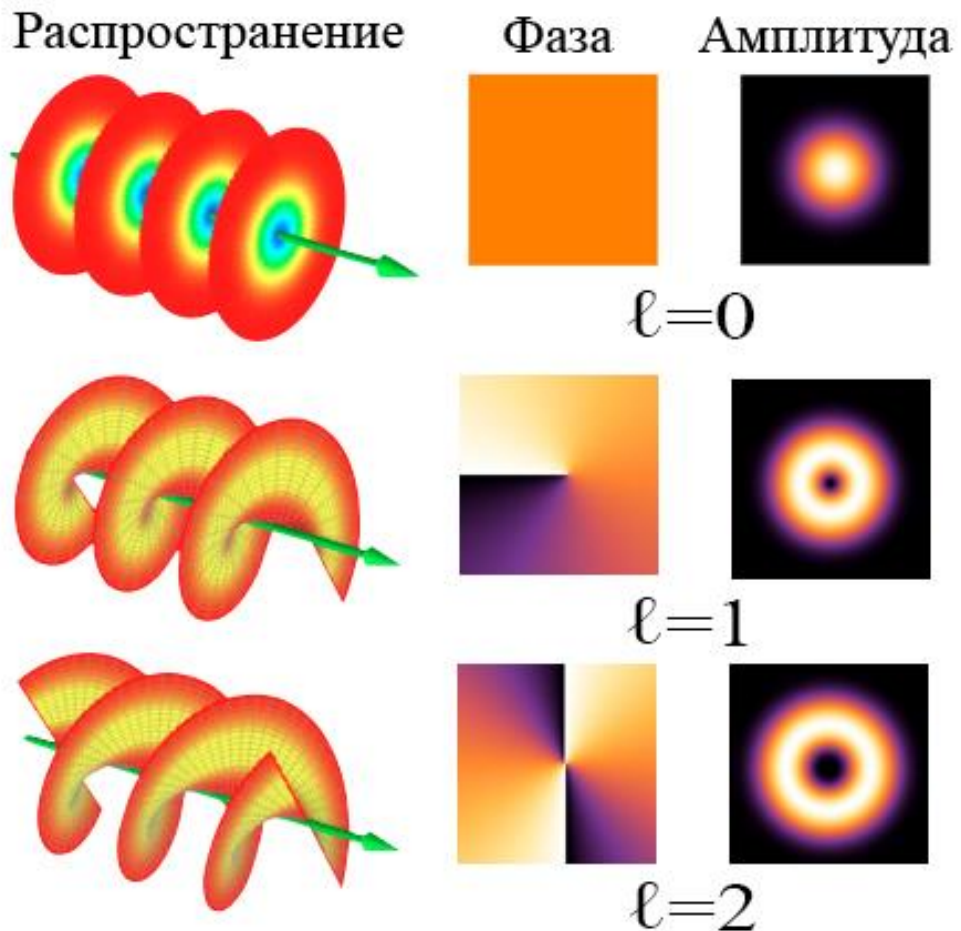


Рисунок 1.6 Основные характеристики, такие как распространение вдоль оси ξ , фазовая поверхность и распределение амплитуды поля, показаны для оптических вихрей с моментом $\ell = 0, 1, 2$.

Очевидно, что при $\ell=0$ электрическое поле (1.14) переходит в рассмотренный выше гауссов пучок. Фурье-образ оптического вихря (1.14) дается выражением:

$$\tilde{\mathbf{E}}_\ell^{(0)}(\boldsymbol{\kappa}) = (-i)^\ell \kappa^{|\ell|} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2} + i\ell\theta_\kappa\right) \mathbf{e}_{in}. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.15) в электрическое поле конической рефракции (1.5) и интегрируя по угловой переменной, получим:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, \xi) = e^{i\ell\varphi} \left[B_0 \hat{I} + B_{+1} e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} + B_{-1} e^{-i\varphi} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

$$B_0(\rho, \xi) = \int_0^\infty d\kappa \kappa^{|\ell|+1} \tilde{\mathcal{E}}(\kappa) \exp\left(-\frac{1}{2}i\xi\kappa^2\right) \cos(\kappa\rho_0) J_\ell(\kappa\rho), \quad (1.17)$$

$$B_{\pm 1}(\rho, \xi) = \pm \int_0^\infty d\kappa \kappa^{|\ell|+1} \tilde{\mathcal{E}}(\kappa) \exp\left(-\frac{1}{2}i\xi\kappa^2\right) \sin(\kappa\rho_0) J_{\ell\pm 1}(\kappa\rho).$$

Физический смысл формулы (1.16) становится более очевидным, если разложить вектор электрического поля по базису лево и право поляризованных волн:

$$\mathbf{E} = e^{i\ell\varphi} \begin{pmatrix} B_0 & B_{-1} e^{-i\varphi} \\ B_1 e^{i\varphi} & B_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d_L \\ d_R \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

где $[d_L, d_R]$ вектор поляризации падающего на кристалл пучка в новом базисе. Получается, что лево-поляризованный оптический вихрь будет порождать компоненты поля КР, одна из которых будет той же поляризации и с тем же оптическим зарядом ℓ , а вторая компонента будет право-поляризованной, с оптическим зарядом на единицу меньше ℓ . У право-поляризованного света вторая компонента тоже будет обладать левой циркулярной поляризацией, но оптический заряд будет на единицу больше, а не меньше. Для неполяризованного света интенсивность пучка будет состоят из суммы интенсивностей всех трех компонент:

$$I(\boldsymbol{\rho}, \xi) = |B_0|^2 + \frac{1}{2}|B_1|^2 + \frac{1}{2}|B_{-1}|^2, \quad (1.19)$$

В случае $\ell=0$, компонента $B_{-1} = -B_1$ и мы снова получаем формулу (1.13). В своей работе Пит не только получил вышеизложенные формулы для конической рефракции оптических вихрей, но и экспериментально получил распределение интенсивности в фокальной (Ллойдовской) плоскости ($\xi = 0$), для неполяризованных оптических вихрей с $\ell = 0, 1, 2$ (рис. 1.7). Как можно увидеть на Рис. 1.7, при увеличении

оптического заряда ℓ растет количество темных колец. Данный неожиданный эффект будет, в дальнейшем, объяснен в рамках предложенной бессель-гауссовой модели конической рефракции.

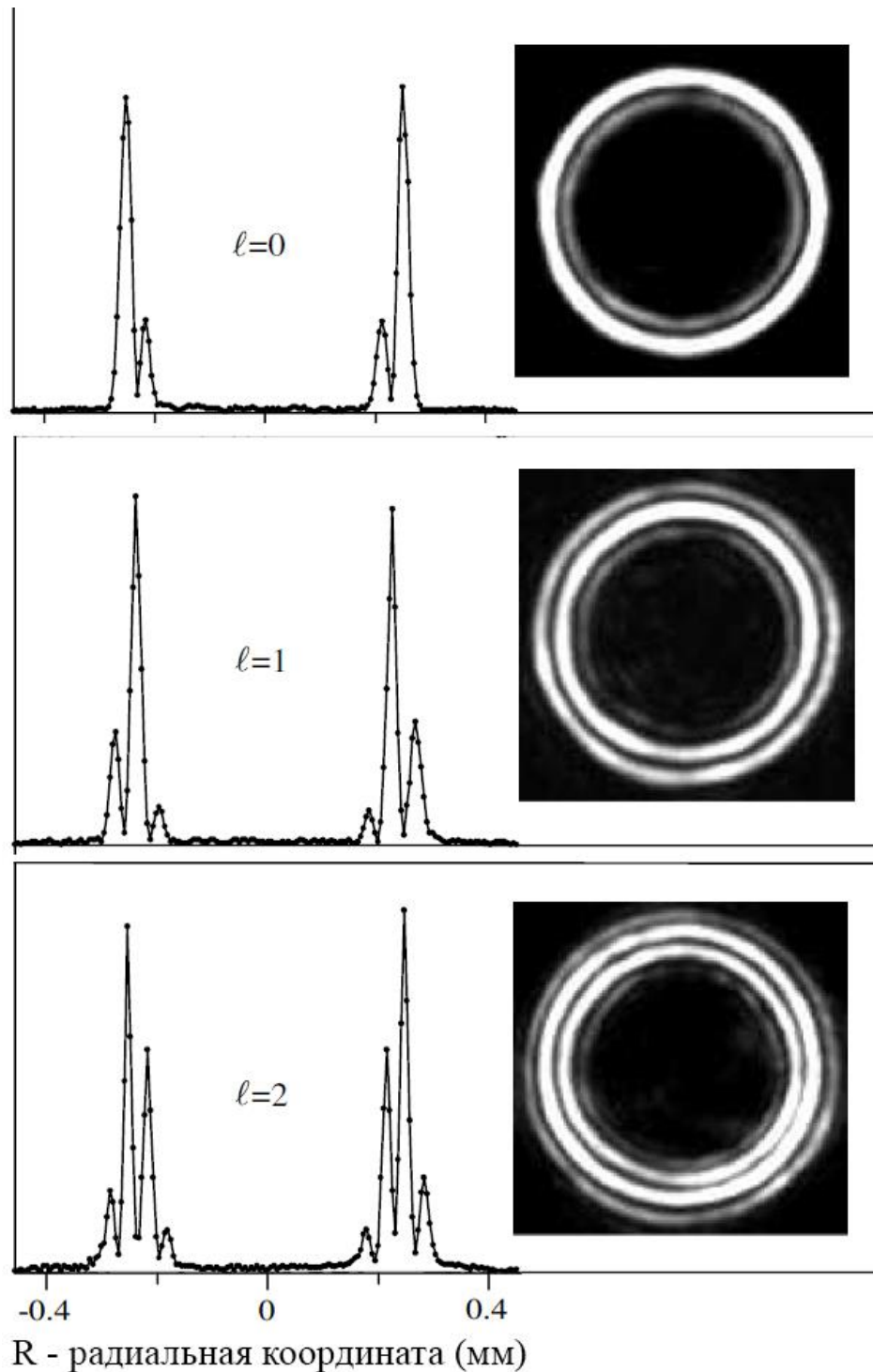


Рисунок 1.7 Продольные и поперечные распределения интенсивности в фокальной плоскости конической рефракции неполяризованных оптических вихрей с $\ell = 0, 1, 2$ [25].

В результате, использование лево- и право-поляризованного базиса в формуле (1.18) позволило записать электрическое поле пучка конической рефракции в простом, компактном и физически понятном виде. Оказывается, можно обобщить полученную для оптических вихрей (1.14) формулу для электрического поля (1.18) произвольного вида. Необходимо только оставить предположение об однородной поляризации света перед кристаллом конической рефракции. В этом случае, вектор электрического поля в прямом и обратном пространстве будет иметь следующий вид: $\mathbf{E}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) = \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{e}_{in}$ и $\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}(\mathbf{k}) = \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\mathbf{e}_{in}$, где вектор поляризации $\mathbf{e}_{in} = [d_L, d_R]$ записан в базисе лево- и право-поляризованных волн. При этом функции $\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho})$ и $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k})$, определяющие распределение электрического поля в прямом и обратном пространстве, связаны друг с другом при помощи фурье-преобразования (1.1). В результате, формула (1.5) переходит в:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, \xi) = \begin{pmatrix} B_0 & B_{-1} \\ B_1 & B_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d_L \\ d_R \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

где вводится обобщение одномерных интегралов Бельского-Хапалука-Берри, полученных для цилиндрически симметричных пучков, на случай произвольного профиля электрического поля:

$$B_\mu(\boldsymbol{\rho}, \xi) = \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \exp(i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}) \tilde{G}_\mu(\mathbf{k}, \xi) \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}), \quad (1.21)$$

$$\tilde{G}_\mu(\mathbf{k}, \xi) = (-i)^\mu \cos(k\rho_0 - \mu\frac{\pi}{2}) \exp\left[i\mu\theta_k - i\kappa^2\xi/2\right], \quad (1.22)$$

где $\mu = 0, \pm 1$ и $\tilde{G}_\mu(\mathbf{k}, \xi)$ - функция Грина, описывающая как трансформацию кристалла КР, так и пространственную эволюцию пучка вдоль оси ξ . Аналогично случаю конической рефракции оптических вихрей (1.18), компонента поля B_μ имеет дополнительный ОУМ $\hbar\mu$, поскольку в формуле (1.21) присутствует зависимость вида $\exp(i\mu\theta_k)$. Далее выражение (1.20) пригодится нам при построении теории конической рефракции частично когерентного излучения.

Необходимо отметить, что изложенную выше параксиальную модель конической рефракции можно переформулировать в более простом и физически понятном виде, известном как двух-конусная модель конической рефракции. Данная модель была получена сначала в работе Соколовского и др. [57], а позже обсуждалась Тюрпиным и др. [58]. Так, необходимо в формуле (1.21) выразить косинус через комплексные экспоненты и сгруппировать слагаемые, у которых в показателе экспоненты стоят одинаковые знаки. В результате, электрическое поле пучка конической рефракции можно разделить на сумму двух слагаемых, также называемых конусами конической рефракции: $\mathbf{E}=\mathbf{C}^{(+)}+\mathbf{C}^{(-)}$, где $\mathbf{C}^{(+)}$ это положительный или расходящийся конус, а $\mathbf{C}^{(-)}$ это отрицательный или сходящийся конус. Выражение для них имеет вид:

$$\mathbf{C}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} C_0^{(\pm)} & C_{-1}^{(\pm)} \\ C_1^{(\pm)} & C_0^{(\pm)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d_L \\ d_R \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

где компоненты конусов конической рефракции:

$$C_\mu^{(\pm)}(\rho, \xi) = \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \exp(i\mathbf{k}\rho) \tilde{G}_\mu^{(\pm)}(\mathbf{k}, \xi) \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}), \quad (1.24)$$

$$\tilde{G}_\mu^{(\pm)}(\mathbf{k}, \xi) = \frac{1}{2} (\pm 1)^\mu \exp\left[\mp i k \rho_0 + i \mu \theta_k - i k^2 \xi / 2\right]. \quad (1.25)$$

Важным отличием от теории Бельского-Хапалюка-Берри, является ясный физический смысл у полей $\mathbf{C}^{(+)}$ и $\mathbf{C}^{(-)}$. Теперь это два световых конуса, расходящийся и сходящийся к оси распространения ξ , как это показано на Рис. 1.8b и Рис. 1.8c, соответственно.

Чтобы подтвердить высказанные предположения, в работе Соколовского и др. [57] был проведен эксперимент с использованием неполяризованного He-Ne лазера, мощностью 2 мВт, луч которого пропускался через кристалл KGW длиной 15 мм, а получавшееся за гранью кристалла изображение снималось CCD камерой,

установленной на подвижном креплении. На рис. 1.8d показана полученная картина пространственной эволюции интенсивности конической рефракции, которая хорошо согласуется с параксиальной теорией (1.9) или двух-конусной моделью (1.23).

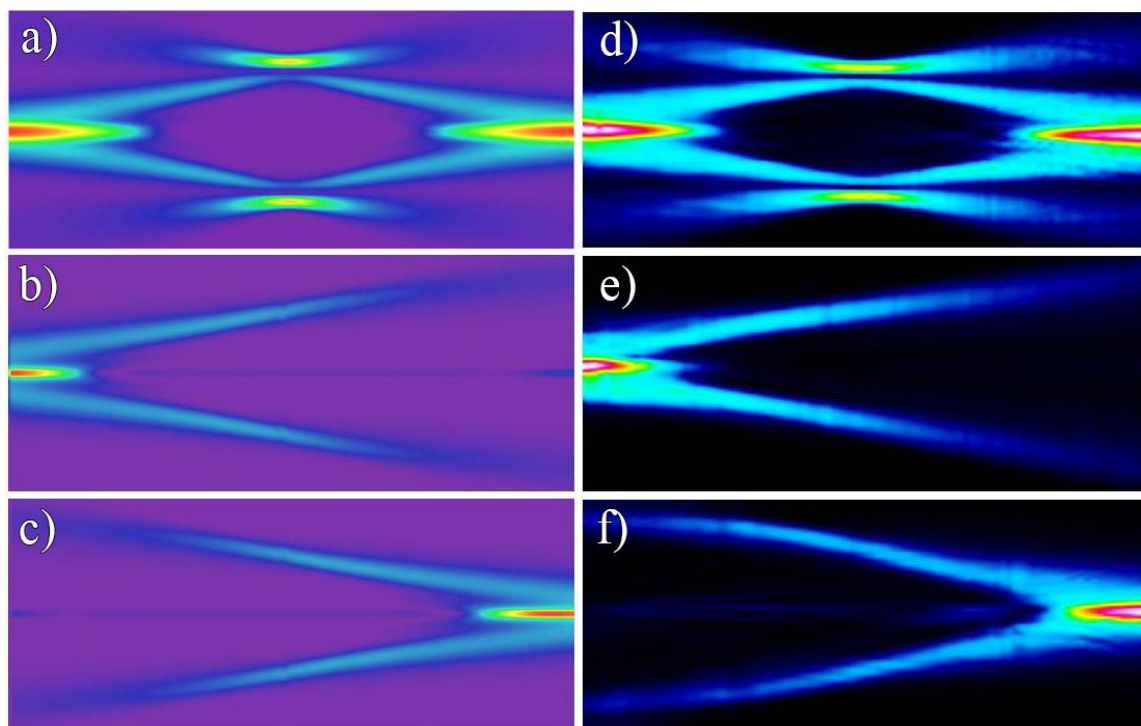


Рисунок 1.8 Теоретическое (a-c) и экспериментальное (d-a) осевое распределение интенсивности пучка конической рефракции (a, d), а также интенсивности конусов конической рефракции $C^{(+)}$ (b, e) и $C^{(-)}$ (c, f), соответственно [24].

Чтобы наблюдать в эксперименте два световых конуса $C^{(+)}$ и $C^{(-)}$ по отдельности, необходимо поставить препятствие на пути прохождения одного из световых конусов. Для этого в работе [24], за поверхностью кристалл устанавливали пинхол или круглый непрозрачный экран. Пинхол блокировал внешний конус, пропуская внутренний конус. Непрозрачный экран наоборот, останавливал распространение расходящегося, внутреннего конуса, пропуская сходящийся, внешний конус. Результаты эксперимента представлены на Рис. 1.8e и Рис. 1.8f, показывая прекрасное согласие теории и эксперимента.

1.3. Практические применения конической рефракции

Область науки, связанная с оптическим захватом и манипулированием объектами размера порядка нескольких микронов начала приковывать к себе значительный интерес и обрести практическими применениями еще в далекие 1970-ые [59,60]. Оптические пинцеты, основанные на возникновении возвращающей механической силы при рассеянии света на микроскопическом объекте, нашли свое широкое применение в физике, биологии и медицине. Ранее было показано, что при помощи конической рефракции гауссова пучка можно также создавать эффективные оптические пинцеты. Так, О`Дваер и др [8] предложили использовать угловой градиент интенсивности кольца Поггендорфа для манипуляции угловым положением захваченной частицы. Для линейно поляризованного света перед кристаллом, коническая рефракция имеет форму полумесяца, и максимум интенсивности вращается с направлением линейной поляризации исходного пучка. В результате, изменяя плоскость линейной поляризации можно легко вращать захваченную частицу. Тот же самый авторский коллектив с помощью каскадной конической рефракции смогли провести захват сразу трех частиц [48]. Также необходимо сказать про работу МакДональда и др. [51], в которой обсуждается три различных способа оптического захвата частиц: С помощью первого пятна Рамана, располагающегося за ллойдовской плоскостью, с помощью колец Поггендорфа и с помощью второго пятна Рамана.

Излучение, генерируемое лазерами, обычно имеет однородную пространственную поляризацию (линейную, эллиптическую или циркулярную), но, в некоторых обстоятельствах, можно получить пучок с неоднородным распределением поляризации, как это было сделано в работе [52]. Двуосные кристаллы, в этой связи, могут выступать в качестве активных элементов лазера, генерирующего неоднородно поляризованное излучение. Первая работа по этой теме была опубликована Хелстромом и др. [6]. Они использовали 3 мм кристалл KGW, с 5% легированием иттербием. Поляризация лазерного пучка при этом контролировалась перемещением выходного частично пропускающего зеркала. Для постоянной лазерной

накачки на длине волны 980 нм, такой лазер излучал на длине волны порядка 1036-1038 нм, с максимальной мощностью 8.6 Вт и параметром пучка M^2 от 1 до 2. Стоит также сказать о работе Абдолванда и др. [7], где описывается высокоэффективный четырех уровневый лазер на основе конической рефракции. В качестве активного элемента использовался 17 мм кристалл KGW с 3% легированием примесями неодима для генерации излучения на длине волны 1067 нм при оптической накачке на длине волны 808 нм. В результате, в этих работах было показано, что создание лазера на основе конической рефракции осуществимо, а их свойства весьма интересны для дальнейшего исследования.

Существует множество областей, где точное измерение поляризации светового пучка или поляриметрических свойств определенного материала становится необходимым, например, для определения оптических параметров материалов или тонких пленок (показателя преломления, толщины, коэффициента поглощения, шероховатости и т. д.), или для визуализации в медицине и астрономии. Поляриметры являются основными устройствами для получения таких поляризационных измерений. Так как распределение интенсивности конической рефракции крайне чувствительно к поляризации падающего на кристалл пучка, данное оптическое явление может быть использовано для построения однозарядного поляриметра Стокса [61,62]. Эффективность такого устройства была проверена путем измерения различных состояний поляризации света, включая полностью поляризованный свет, частично поляризованный свет и полностью неполяризованный свет. Предложенный поляриметр на конической рефракции может быть использован в качестве неполного поляриметра для измерения линейной поляризации как для полностью, так и для частично поляризованного света, как показано в [63,64]. Для когерентного света эта система продемонстрировала очень хорошую точность измерения поляризации с максимальной погрешностью 1,1% [64], в то время как в [63] было продемонстрировано измерение оптической активности, индуцированной хиральными растворами с максимальной погрешностью 4%.

Обширные исследования, посвященные оптическим вихрям, волновым дислокациям, фазовым и поляризационным особенностям света, теории орбитального углового момента света и т.д. за последние 30 лет, привели к становлению сингулярной оптики как независимой и быстро развивающейся области современной оптики. Как хорошо известно, свет может нести как спиновый угловой момент (СУМ), так и орбитальный угловой момент. СУМ связан с поляризацией светового пучка и для линейно-поляризованного света он равен нулю, а для лево или право поляризованного света СУМ равен $\pm\hbar$. В свою очередь, ОУМ связан с винтовыми дислокациями в фазовом фронте электромагнитного поля, что проявляется в характерной азимутальной зависимости вида $\exp(im\varphi)$, где φ - азимутальный угол, а m – целое число также известное как оптический заряд, которое пропорционально величине ОУМ света $\hbar m$. Как обсуждалось в работах [65], коническая рефракция запутывает СУМ и ОУМ света, падающего на кристалл. Так, для поля, не обладающего ОУМ, одна компонента электромагнитного поля конической рефракции сохраняет состояние поляризации падающего пучка, а вторая компонента ортогонально поляризована первой и несет дополнительный ОУМ равный $\pm\hbar$. В результате, оказывается, что двуосный кристалл действует как q-пластинка порядка $\frac{1}{2}$, поглощая часть углового момента света. Спин-орбитальное взаимодействие света в рамках явления конической рефракции было использовано О'Дуайером и др. [48], для генерации непрерывно перестраиваемого дробного ОУМ, путем регулирования эллиптической поляризации падающего света. Коническую рефракцию также можно использовать для контролируемой генерации света, несущего ненулевой ОУМ, при помощи каскадной конической рефракции и круговых поляризаторов, как показано О'Дуайером и др. [66]. Оказывается, можно отфильтровать компоненты поля конической рефракции с ОУМ равным \hbar , при помощи круговых поляризаторов, а именно комбинации четвертьволновой пластины с линейным поляризатором. Этот отфильтрованный свет необходимо отправить через следующий кристалл конической рефракции, что приведет к образованию пары полей, одна из ко-

торых несет уже две единицы ОУМ на фотон. Добавление последующего кристалла конической рефракции и соответствующая фильтрация компонент пучка приводят к контролируемой генерации ОУМ произвольной величины с неизбежной потерей мощности после каждой фильтрации.

1.4. Краткие Итоги

В данной главе диссертации был проведен обзор литературы. В §1.1 обсуждалась коническая рефракция когерентного излучения. Были описаны основные свойства конической рефракции, связанные с фокальной плоскостью (кольца Поггендорффа), пространственной эволюцией (пятна Рамана), поляризационной и вихревой структурой пучка. В §1.2 приведены основные положения параксиальной теории конической рефракции Бельского-Хапалюка-Берри [23]. На примере конической рефракции гауссова пучка с линейной и циркулярной поляризацией, а также конической рефракции оптического вихря, обсуждались характерные особенности распространения конической рефракции когерентного излучения в свободном пространстве. Была рассмотрена двух-конусная модель конической рефракции [24] и интерференционная природа темного кольца Поггендорффа в фокальной плоскости. В §1.3 описаны практические применения конической рефракции, связанные с оптическим захватом и манипулированием микрочастицами, лазерами на основе конической рефракции, поляризационной метрологией и генерацией оптических вихрей.

Глава 2 Бессель-гауссова модель конической рефракции

2.1. Краткое введение

На данный момент, теория Бельского-Хапалюка-Берри и двух-конусная модель конической рефракции дают всеобъемлющее описание явления конической рефракции когерентного излучения и содержат в себе полную информацию о пространственном распространении света в свободном пространстве. Однако, из-за интегрального характера имеющейся теории, крайне неочевидно за счет каких конкретных механизмов формируются те или иные свойства пространственной эволюции.

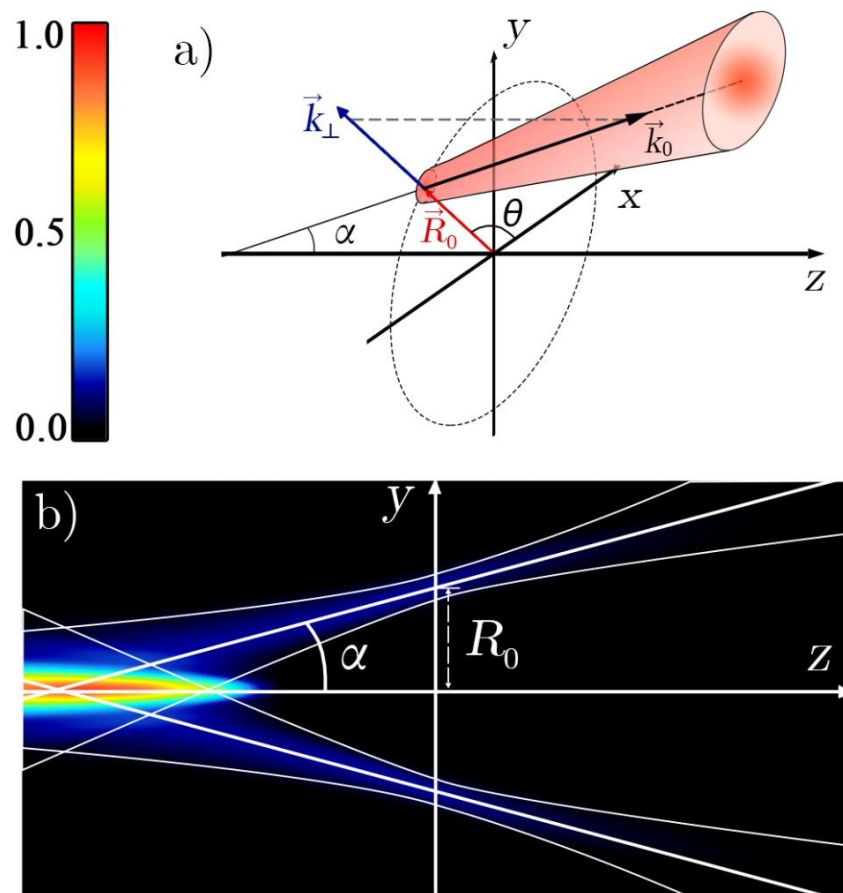


Рисунок 2.1 (а) Пространственная эволюция гауссова пучка, распространяющегося под углом α относительно оси распространения z , где R_0 - вектор смещения центра пучка в фокальной плоскости ($z = 0$), зависящий от угла θ , k_0 - волновой вектор света в вакууме, k_{\perp} - поперечный волновой вектор, являющийся проекцией k_0 на плоскость x - y . (б) Осевое распределение интенсивности положительного конуса $C^{(+)}$, для гауссова пучка. Белые сплошные кривые показывают, как конус конической рефракцией может быть аппроксимирован гауссовыми пучками.

В данной главе будет показано, что при выполнении условия $\rho_0 \gg 1$ (радиус кольца конической рефракции много больше его перетяжки) конусы конической рефракции $C^{(\pm)}$ произвольного элегантного лаггер-гауссова пучка и бессель-гауссова пучка могут быть аппроксимированы суперпозицией гауссовых пучков (Рис. 2.1а), центры которых расположены на окружности радиуса R_0 в фокальной плоскости, а волновые векторы лежат на конусе с углом при вершине $\pm 2\alpha$, как показано на Рис. 2.1б для конуса $C^{(+)}$. Предлагаемый подход [А1] позволит получить простой закон распространения электрического поля пучка конической рефракции как вблизи фокальной плоскости, так и в дальнем поле, и даст возможность объяснить многие свойства конической рефракции (многокольцевое распределение интенсивности в фокальной плоскости, кольца Поггендорффа и пятна Рамана) как следствие свойств распространения составляющих гауссовых пучков.

2.2. Бессель-гауссова модель конической рефракции гауссова пучка

Чтобы лучше понять основную идею предложенного подхода, рассмотрим случай конической рефракции гауссова пучка и проанализируем пространственное распределение интенсивности положительного конуса конической рефракции $C^{(+)}$, показанное на рис. 2.1(б). Аппроксимируем конус конической рефракции двумя гауссовыми пучками, показанными белыми кривыми на рис. 2.1(б). Два таких гауссовых пучка, верхний и нижний, отстоят от оси распространения на расстояние $\pm R_0$, равное радиусу кольца конической рефракции. При этом каждый пучок распространяются относительно оси распространения z под некоторым углом $\pm\alpha$, за счет чего происходит концентрация излучения в приосевой области. Безусловно, так как распределение интенсивности пучка конической рефракции имеет кольцевую форму, необходимо расположить гауссовы пучки в каждой точке такого кольца радиуса R_0 . При этом, угол θ определяет положение центра заданного гауссова пучка, как показано на рис. 2.1(а). Далее мы ненадолго перейдем обратно от безразмерных

к размерным координатам для больше наглядности. Запишем явный вид электрического поля линейно поляризованного гауссова пучка, который пока что будет распространяться строго вдоль оси z [67]:

$$\mathbf{G}_\theta(\mathbf{r}, z) = \frac{\mathbf{A}(\theta)}{W(z)^2} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0)^2}{2W(z)^2} + ik_0 z\right), \quad (2.1)$$

где θ – угол между вектором смещения центра пучка $\mathbf{R}_0 = R_0[\cos(\theta), \sin(\theta)]$ и осью x ; R_0 – радиус кольца конической рефракции, $\mathbf{A}(\theta)$ – вектор поляризации пучка, зависящий от угла θ ; k_0 – волновое число света в вакууме; $W(z)^2 = W_0^2(1 + i z/z_R)$ – комплексная ширина пучка, отвечающая за дифракционное уширение и изменение волнового фронта гауссова пучка; W_0 – перетяжка пучка, $z_R = k_0 W_0^2$ – длина Рэлея гауссова пучка. Перейдем к случаю гауссова пучка, распространяющегося под углом $\pm\alpha$ к оси z , применяя к формуле для электрического поля (2.1) следующие замены:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow \mathbf{r} - z\mathbf{k}_\perp / k_0, \\ z &\rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right)z + (\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}) / k_0, \\ W(z) &\rightarrow W(z), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\mathbf{k}_\perp = \pm k_0 \alpha [\cos(\theta), \sin(\theta)]$ – проекция волнового вектора гауссова пучка на поперечную плоскость. Необходимо упомянуть, что при выводе соотношения (2.2) мы использовали параксиальное приближение ($\alpha \ll 1$). В первой строчке (2.2) зацепление поперечного вектора \mathbf{r} с продольной координатой z приводит к сдвигу центра гауссова пучка в процессе пространственного распространения. Вторая строчка в (2.2) связана с наличием ненулевой проекции волнового вектора пучка, распространяющегося под наклоном. Поэтому продольная компонента волнового вектора уменьшается с ростом угла α . Третья строчка в (2.2) имеет простой смысл и связана с неизменностью ширины пучка из-за появления наклонного распространения, т.к. мы находимся в рамках параксиального приближения и можем пренебречь эллип-

точностью, которую приобретает такой наклонно распространяющийся гауссов пучок. В результате, у всех гауссовых пучков в суперпозиции одинаковая перетяжка. Подставим (2.2) в выражение для электрического поля гауссова пучка (2.1) и получим:

$$\mathbf{G}_\theta^{(\pm)}(\mathbf{r}, z) = \frac{\mathbf{A}(\theta)}{W(z)^2} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0 - z\mathbf{k}_\perp/k_0)^2}{2W(z)^2} + i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) - i\alpha^2 \frac{k_0 z}{2}\right), \quad (2.3)$$

где мы, для удобства, исключили фазовый множитель $\exp(ik_0 z)$, который возникает из $\exp(ik_0 \cos(\alpha)z)$ в параксиальном приближении $\alpha \ll 1$. Пространственная эволюция гауссова пучка (2.3) показана на Рис. 2.1(а). Вектор поляризации $\mathbf{A}(\theta)$ выберем так, чтобы он описывал характерную для конической рефракции поляризационную зависимость:

$$\mathbf{A}(\theta) = w_0^2 A_0 e^{i\ell\theta} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta} \\ e^{+i\theta} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d_L \\ d_R \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где A_0 — комплексная амплитуда, $\hbar\ell$ - орбитальный угловой момент падающего на кристалл света. Чтобы получить результирующее электрическое поле конусов конической рефракции (1.23), необходимо (2.3) проинтегрировать по всем углам θ от 0 до 2π , получая:

$$\mathbf{U}^{(\pm)}(\vec{r}, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{G}_\theta(\mathbf{r}, z) d\theta = e^{i\ell\varphi} \begin{pmatrix} U_0^{(\pm)} & U_{-1}^{(\pm)} e^{-i\varphi} \\ U_{+1}^{(\pm)} e^{+i\varphi} & U_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d_L \\ d_R \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

где мы получаем ту же самую поляризационную зависимость, что и в формуле (1.23), и определяем компоненты пучка с различными оптическими зарядами или орбитальными угловыми моментами как:

$$U_m^{(\pm)} = \frac{A_0}{\sigma(\xi)^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + \rho_\xi^2}{2\sigma(\xi)^2} \mp i\rho_0 a_0 - ia_0^2 \frac{\xi}{2}\right) I_{\ell+m} \left(\frac{\rho \rho_\xi}{\sigma(\xi)^2} \pm i\rho a_0 \right). \quad (2.6)$$

В уравнении (2.6) мы перешли обратно к нормированным координатам (ρ, ζ) и ввели новые определения: $a_0 = \alpha k w_0$ – нормированный параметр наклона конуса конической рефракции, $\sigma(\zeta) = (\sigma_0^2 + i\zeta)^{1/2}$ – пространственная функция распространения, аналогичная ранее введенной $W(z)$, где $\sigma_0 = W_0/w_0$ – отношение ширины аппроксимирующего гауссова луча (2.3) к ширине падающего на кристалл пучка, $\rho_\zeta = \rho_0 \pm a_0 \zeta$ – радиус кольца для произвольного значения продольной координаты ζ , $I_{\ell+m}(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка $\ell+m$.

Построенные пучки (2.6) известны как обобщенные Бессель-Гауссовы (БГ) пучки порядка $\ell+m$. Впервые БГ пучки были введены в 1987 году [68], чтобы преодолеть трудности, связанные с бесконечной энергии, необходимой для формирования пучка Бесселя [69,70]. Обобщенные БГ пучки с $\rho_0 \neq 0$ и $a_0 \neq 0$ впервые были рассмотрены в работе [71]. Как оказывается, многие свойства конической рефракции характерны для обобщенных бессель-гауссовых пучков, а именно: кольцевая структура с радиусом ρ_0 в фокальной плоскости, которая при распространении вдоль оси ζ с наклоном $a_0 \neq 0$ формирует яркое пятно вблизи оси распространения на расстоянии $\zeta_{\text{Raman}} = \rho_0/a_0$, аналогичное пятну Рамана [36]. Кроме того, при $a_0 \neq 0$ обобщенный бессель-гауссов пучок обладает ненулевой проекцией волнового вектора \mathbf{k}_0 на поперечную координатную плоскость. Это приводит к формированию интерференционной картины в фокальной плоскости за счет пересечения двух обобщенных БГ пучков с противоположными значениями угла распространения, каждому из которых соответствует конус конической рефракции $\mathbf{C}^{(+)}$ и $\mathbf{C}^{(-)}$. Стоит отметить, что идея о схожести между конической рефракцией и БГ пучков впервые обсуждалась Питом в [72]. Однако он рассматривал модифицированный БГ пучок, который является частным случаем обобщенного луча БГ при $a_0 = 0$, в предположении $\rho_0 \approx 0 \dots 2$. Как мы покажем далее, для случая $\rho_0 \gg 1$ (хорошо очерченное кольцо конической рефракции) необходимо использовать обобщенные БГ пучки с $a_0 \neq 0$.

Другая важная особенность обобщенных БГ пучков состоит в том, что к ним применим формализм ABCD матриц и гауссовой оптики [73]. Пройдя через оптическую систему, описываемую ABCD матрицей, обобщенный БГ пучок останется обобщенным БГ, но при этом изменяться его параметры, такие как перетяжка W_0 , радиус кольца в фокальной плоскости R_0 и угол наклона пучка α . Закон такого преобразования может быть получен из интегралов Коллинза [74]. В дальнейшем, такой подход к описанию КР через обобщенные БГ пучки, к которым применим формализм гауссовой оптики, может быть крайне полезен для расчета устойчивых мод лазерных резонаторов с двусным кристаллом в качестве активной среды [7,53]. Такой расчёт успешно сработал для лазерного резонатора с обычным кристаллом, в котором в качестве одного из зеркал использовался аксикон [75]. В результате, устойчивые моды такого резонатора имели вид БГ пучков высшего рода, где в качестве составных пучков использовались эрмит-гауссовы пучки, за место гауссовых пучков, рассматриваемых в данной работе.

2.3. Элегантные лаггерр-гауссовы моды

Далее мы покажем, что бессель-гауссову модель можно применить к конической рефракции элегантные лаггерр-гауссовых мод [76]. Соответствующий им, вектор электрического поля \mathbf{E} в фокальной плоскости ($\xi = 0$) может быть записан в виде:

$$\mathbf{E}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) = \rho^{|\ell|} L_n^\ell \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{2} + i\ell\varphi \right) \mathbf{e}_{in}, \quad (2.7)$$

где (ρ, φ) - полярные координаты в поперечной плоскости, $\mathbf{e}_{in} = [d_L, d_R]$ - вектор поляризации, где в качестве базисных функций выбраны левая и правая круговые поляризации, а $L_n^\ell(x)$ - многочлен Лагерра порядка n и индекса ℓ [77]. Фурье-образ такого пучка будет иметь вид:

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}(\mathbf{k}) = \frac{(-i)^\ell}{n!2^n} \kappa^{2n+|\ell|} \exp \left(-\frac{\kappa^2}{2} + i\ell\theta_\kappa \right) \mathbf{e}_{in}. \quad (2.8)$$

Необходимо заметить основные отличия между хорошо известными стандартными и элегантными лаггерр-гауссовыми пучками. В прямом пространстве (2.7) элегантные моды пропорциональны многочлену Лагерра $L_n^\ell(\rho^2/2)$, в то время как стандартные моды в аргументе функции Лагерра содержат дополнительную двойку $L_n^\ell(\rho^2)$. Кажущееся небольшое отличие в прямом пространстве приводит к значительной разнице фурье-образов стандартных и элегантных пучков. Так, стандартная лаггерр-гауссова мода при преобразовании фурье переходит сама в себя. Из-за этого свойства стандартные моды являются собственными модами оптического резонатора со сферическими зеркалами, и поэтому более известны в литературе.

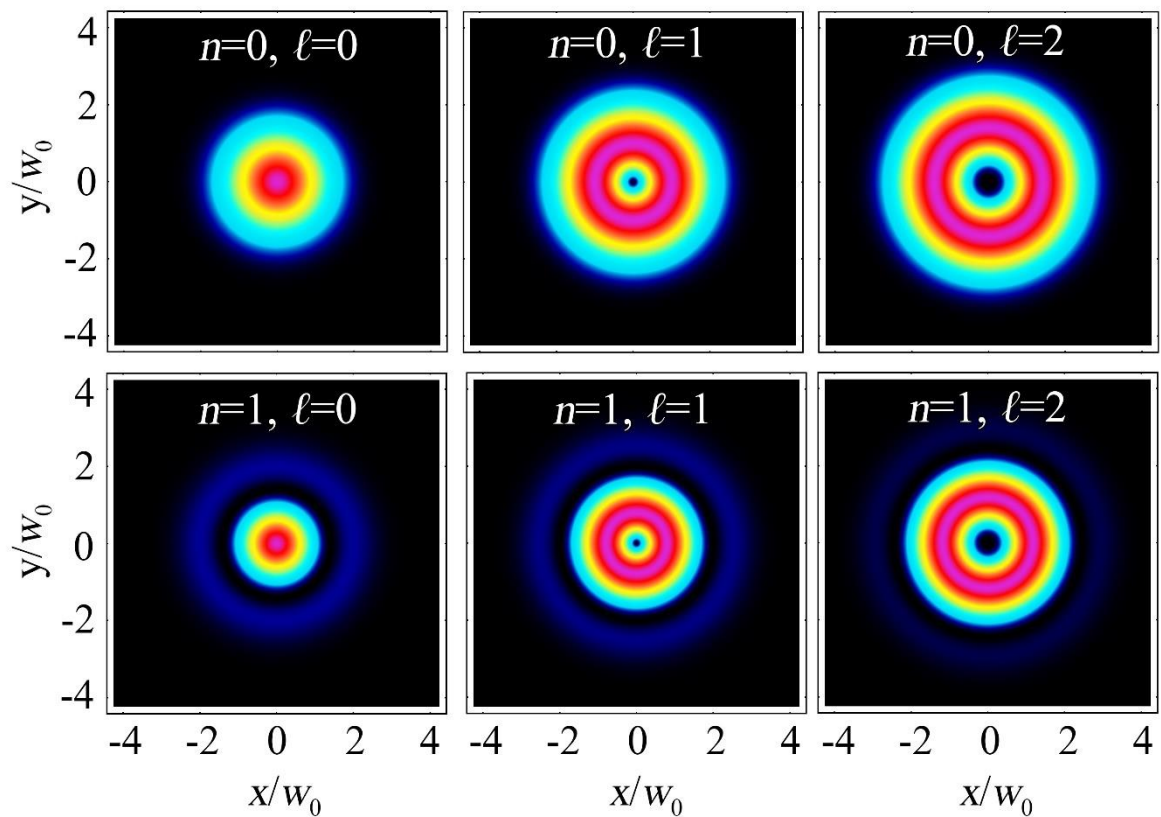


Рисунок 2.2 Распределения интенсивности элегантных лаггерр-гауссовых мод в фокальной плоскости, построенные с использованием формулы (2.7), для различных значений модовых индексов.

В свою очередь, фурье-образ элегантной моды, определяемый формулой (2.8), не совпадает с электрическим полем в прямом пространстве (2.7), однако имеет достаточно простой вид произведения гауссовой функции на степенную, с

показателем степени, зависящим от индекса моды. Необходимо также упомянуть, что элегантные лаггер-гауссовы пучки (2.7) являются полным биортогональным базисом, что позволяет разложить по ним произвольный однородно поляризованный пучок.

Рассмотрим, как изменятся элегантные лаггер-гауссовы пучки после прохождения через двуосный кристалл. Согласно двух-конусной модели, электрическое поле конической рефракции элегантной лаггер-гауссовой моды можно представить в виде суммы двух конусов $\mathbf{E}=\mathbf{C}^{(+)}+\mathbf{C}^{(-)}$, которые задаются следующим выражением:

$$\mathbf{C}^{(\pm)}(\rho, \xi) = e^{i\ell\varphi} \begin{pmatrix} C_0^{(\pm)} & C_{-1}^{(\pm)} e^{-i\varphi} \\ C_{+1}^{(\pm)} e^{+i\varphi} & C_0^{(\pm)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d_L \\ d_R \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

где компоненты поля определяются как:

$$C_m^{(\pm)}(\rho, \xi) = \int_0^{+\infty} d\kappa \kappa c_m^{(\pm)}(\kappa) \exp\left(-\frac{1}{2}i\xi\kappa^2\right) J_{\ell+m}(\kappa\rho), \quad (2.10)$$

$$c_m^{(\pm)}(\kappa) = \frac{(\pm i)^m}{n!2^{n+1}} \kappa^{2n+|\ell|} \exp\left(-\frac{1}{2}\kappa^2 \mp i\kappa\rho_0\right). \quad (2.11)$$

В этих уравнениях (ρ, φ, ξ) – цилиндрические координаты, нормированные на протяжку луча и длину Рэлея падающего луча, т. е. $\xi = z/z_R$ и $\rho = r/w_0$, $\rho_0 = R_0/w_0$ – нормированный радиус кольца конической рефракции за кристаллом, который играет центральную роль в определении результирующего распределения интенсивности конической рефракции, $J_{\ell+m}(x)$ – функция Бесселя первого рода порядка $\ell+m$, $m = 0, \pm 1$ – целое число. Из уравнения (2.9) видно, что для входного поля с оптическим зарядом ℓ пучок конической рефракции содержит два дополнительных компонента с оптическими зарядами $\ell \pm 1$. Это явление было впервые изучено Питом [25] для случая простейших оптических вихрей и затем подробно обсуждалось в [20].

2.4. Параметры бессель-гауссовой модели

В §2.2 мы продемонстрировали, что эффективное описание конической рефракции гауссова пучка может быть описано при помощи суперпозиции гауссовых пучков. Было показано, что результирующее электрическое поле выражается через хорошо известные обобщенные бессель-гауссовые пучки. Такие пучки характеризуются следующими четырьмя параметрами: A_0 – комплексная амплитуда пучка, $a_0 = akw_0$ – нормированный угол наклона пучка, $\sigma_0 = W_0/w_0$ – нормированная перетяжка пучка, нормированный радиус кольца ρ_0 . При этом $\rho_0 = R_0/w_0$ считается фиксированным и задается радиусом кольца конической рефракции R_0 . В данном разделе мы обобщим построенную модель на случай конической рефракции элегантных лаггер-гауссовых мод. Далее мы найдем явную зависимость параметров обобщенных бессель-гауссовых пучков от модовых индексов.

Для определения параметров модели рассмотрим компоненты поля положительного конуса конической рефракции в фокальной плоскости при условии $\rho_0 \gg 1$, что соответствует четко выделенному кольцу конической рефракции. В этом случае можно заменить функцию Бесселя под интегралом (2.10) ее асимптотическим разложением и получить формулу распространения конуса, справедливую вдали от продольной оси, т. е. при $\rho \gg 0$:

$$C_m^{(+)}(\rho, \xi = 0) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} F(\rho), \quad (2.12)$$

$$F(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f(k) \exp[ik(\rho - \rho_0)], \quad (2.13)$$

где мы вводим функцию $f(k)$ как одномерное преобразование Фурье функции $F(\rho)$, которая для случая конической рефракции элегантных лаггер-гауссовых мод равна:

$$f(k) = f(k)_c = \frac{\sqrt{2\pi}}{n!2^{n+1}} \theta(k) k^{2n+|l|+1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}k^2 - i\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right), \quad (2.14)$$

где $\theta(\kappa)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Из (2.12)-(2.14) сразу видно, что при $\rho \gg 0$ компоненты конуса конической рефракции с разными индексами m равны между собой. Данное свойства справедливо только вдали от оси распространения. Кроме того, так как Фурье-образ (2.14) содержит функцию Хевисайда $\theta(\kappa)$, конус $C^{(+)}$ состоит из суперпозиции расходящихся от оси распространения волн.

Проделаем аналогичные операции над обобщенным бессель-гауссовым пучком. Сначала используем преобразование Ханкеля для выражения (2.6), получая:

$$U_m^{(\pm)}(\rho, \xi) = \int_0^{+\infty} d\kappa \kappa u_m^{(\pm)}(\kappa) \exp\left(-\frac{1}{2}i\xi \kappa^2\right) J_{\ell+m}(\kappa\rho), \quad (2.15)$$

$$u_m^{(\pm)}(\kappa) = A_0^{(\pm)} \exp\left(-\sigma_0^2(\kappa^2 + a_0^2)/2\right) J_{\ell+m}(\kappa\tau^{(\pm)}), \quad (2.16)$$

где мы обозначили $\tau^{(\pm)} = \rho_0 \pm ia_0\sigma_0$. Используя асимптотику функции Бесселя на бесконечности, получим:

$$u_m^{(\pm)}(\kappa) \approx A_0^{(\pm)} e^{-\frac{\sigma_0^2}{2}(\kappa^2 + a_0^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa\tau^{(\pm)}}} \cos\left(\kappa\tau^{(\pm)} - \frac{\pi}{2}\left(\ell + m + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (2.17)$$

Далее, используя ту же процедуру, что и в (2.12)-(2.14), из уравнений (2.15) и (2.17) можно получить следующее выражение для одномерного преобразования Фурье:

$$f(\kappa) = f(\kappa)_U \approx \frac{A_0^{(+)}}{\sqrt{\tau^{(+)}}} \exp\left(-\sigma_0^2(\kappa - a_0)^2/2\right), \quad (2.18)$$

где мы используем нижний индекс для функции $f(\kappa)$, чтобы обратить внимание для какого конкретно пучка был получен тот или иной Фурье образ. Так, индекс “С” в формуле (2.14) обозначает, что Фурье образ был получен для конуса конической рефракции, а индекс «U» в (2.18) связан с обобщенным бессель-гауссовым пучком.

Таким образом, для нахождения трех параметров предлагаемой бессель-гауссовой модели: комплексной амплитуды $A_0^{(+)}$, угла наклона a_0 и нормированной перетяжки σ_0 , необходимо аппроксимировать одномерный Фурье образ (2.14) при по-

мощи функции гаусса (2.18). Подобная аппроксимация в области классической оптики была использована в работе [78], где замена произведения гауссовой и степенной функций на сдвинутую гауссову функцию была необходима для демонстрации асимптотической эквивалентности бессель-гауссовых пучков и элегантных лаггер-гауссовых мод с индексом $n \gg 1$. Осуществимость подобной аппроксимации является главной причиной, по которой элегантные моды лучше подходят для поставленной задачи, чем их «стандартные» аналоги. Используя метод, предложенный в Приложении В работы [78], можно получить следующую формулу:

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{n!2^{n+1}} \kappa^{2n+|\ell|+1/2} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (2n)^{\frac{|\ell|-1/2}{2}} \exp\left[-\left(\kappa - \sqrt{2n}\right)^2\right], \quad (2.19)$$

где предполагалось $n \gg |\ell| \gg 1$. Сравнивая (2.19) с (2.18), можно получить все параметры бессель-гауссовой модели:

$$a_0 = \sqrt{2n}, \sigma_0 = \sqrt{2}, A_0^{(\pm)} = \exp\left(\mp i \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{\tau^{(\pm)}}{2}} (2n)^{\frac{|\ell|-1}{4}}. \quad (2.20)$$

Далее мы предлагаем метод определения параметров модели, который будет справедлив для произвольных значений n и ℓ , а в пределе $n \gg |\ell| \gg 1$ даст непосредственно выражения (2.19) и (2.20). Безусловно, точное равенство между выражениями (2.18) и (2.14) будет иметь место только в предельном случае $n \gg |\ell| \gg 1$. Однако, для произвольных n и ℓ мы можем понимать эту замену как эффективное описание конической рефракции при помощи обобщенных бессель-гауссовых пучков. Подобная процедура аналогична введению параметра M^2 для многомодового лазерного излучения.

В рамках данной работы мы предлагаем следующее определение для параметров бессель-гауссовой модели:

$$a_0 = \frac{1}{Z_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \kappa |f(\kappa)|^2, \quad (2.21)$$

$$\sigma_0 = \left(\frac{2}{Z_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa (\kappa - a_0)^2 |f(\kappa)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.22)$$

где Z_0 – нормировочный множитель:

$$Z_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa |f(\kappa)|^2, \quad (2.23)$$

а в выражениях (2.21)-(2.23) используется одномерное преобразование Фурье для конуса конической рефракции (2.14).

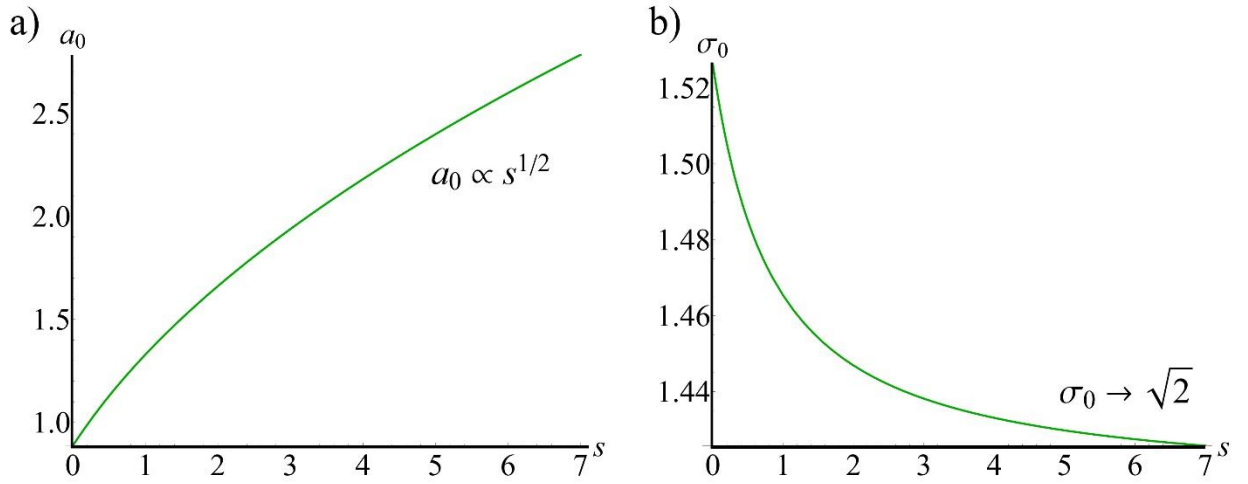


Рисунок 2.3 Зависимость угла наклона обобщенного бessel-гауссова пучка a_0 и перетяжки пучка σ_0 от модового индекса $s = 2n + |\ell|$ элегантной лаггерр-гауссовой моды. При расчете использовались формулы (2.24).

Так, если подставить гауссово распределение (2.18) в формулы для параметров модели (2.21)-(2.22), то мы получим тождественные равенства. В результате, подставляя одномерный Фурье образ конической рефракции элегантного лаггерр-гауссова пучка (2.14) в формулы для параметров (2.21)-(2.22) и проделывая простые алгебраические операции, получим:

$$a_0 = \Gamma(3/2 + s) / s!, \quad \sigma_0 = 1 / \sqrt{2(1 + s - a_0^2)}, \quad (2.24)$$

где $s = 2n + |\ell|$ и $\Gamma(x)$ - гамма-функция. Для $n = 0$ и $\ell = 0$ (гауссов пучок): $a_0 \approx 0.886$ и $\sigma_0 \approx 1.53$. На Рис. 2.3 показано, что при увеличении модовых индексов, угол

наклона пучка будет расти как \sqrt{s} , а перетяжка σ_0 будет уменьшаться до значения $\sqrt{2} \approx 1.42$, что находится в согласии с асимптотическим поведением параметров (2.20) в пределе больших модовых индексов.

Сравнение модуля нормированного одномерного Фурье образа $f(\kappa)$ для пучка конической рефракции (2.14) и для обобщенного бessel-гауссова пучка (2.18) с параметрами (2.19) показано на Рис. 2.4. Таким образом, осталось только определить комплексную амплитуду $A_0^{(\pm)}$, задающую нормировку обобщенного бessel-гауссова пучка относительно конусов конической рефракции. Естественно получить нормировку из сравнения амплитуд поля при $\rho=\rho_0$ и $\zeta=0$, используя приближение $\rho_0 \gg 1$ и уравнения (2.12)-(2.13). Таким образом, получим:

$$A_0^{(\pm)} = \sqrt{\tau^{(\pm)} \sigma_0^2} e^{\mp i \frac{\pi}{2} (\ell + \frac{1}{2})} |F(0)| = \sqrt{\tau^{(\pm)} \sigma_0^2} e^{\mp i \frac{\pi}{2} (\ell + \frac{1}{2})} \frac{1}{n!} 2^{-\frac{s+|\ell|}{4} + \frac{\ell}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{s}{2}\right) \quad (2.25)$$

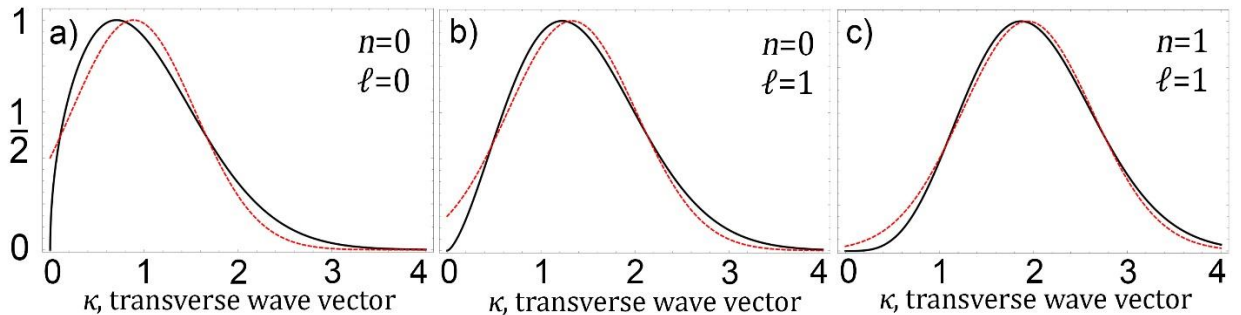


Рисунок 2.4 Модуль нормированного одномерного Фурье образа $f(\kappa)$, вычисленный по точной формуле (2.14) (черная линия) и бessel-гауссовой аппроксимации (2.18) (штриховая красная линия), при $n=0, \ell=0$ (a), $n=0, \ell=1$ (b) и $n=1, \ell=1$ (c). Обе функции нормированы на максимальные значения.

В результате, были получены все параметры модели для произвольных значений модовых индексов n и ℓ . В следующем разделе мы протестируем построенную бessel-гауссову модель конической рефракции в различных характерных пространственных областях: фокальной плоскости, где наблюдается характерное многокольцевое распределение интенсивности, вблизи фокальной плоскости, а также в дальнем поле, где формируются пятна Рамана.

2.5. Фокальная плоскость и кольца Поггендорффа

В данном разделе, мы покажем, что предложенная бессель-гауссова модель конической рефракции изящно объясняет переход классического двухкольцевого распределения интенсивности конической рефракции в фокальной плоскости в многокольцевое, описанный ранее для простейшего случая оптического вихря с $\ell > 0$ [20,25]. Так, как было сказано выше, электрическое поле конической рефракции элегантного лаггерр-гауссова пучка может быть представлено в виде суммы двух обобщенных бессель-гауссовых пучков $\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, \xi) = \mathbf{U}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, \xi) + \mathbf{U}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}, \xi)$, определяемых формулой (2.5). Далее мы будем предполагать, что свет не поляризован, поскольку у конусов конической рефракции (2.9) и обобщенных бессель-гауссовых пучков (2.5) одинаковые поляризационные свойства, и нас больше интересует пространственная эволюция таких пучков. Так же как и в двух-конусной модели конической рефракции, индивидуальные бессель-гауссовы пучки $\mathbf{U}^{(\pm)}(\boldsymbol{\rho}, \xi)$ отличаются направлением распространения по отношению к продольной оси. Так, пучок $\mathbf{U}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, \xi)$ распространяется от продольной оси, а $\mathbf{U}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}, \xi)$ к продольной оси.

Так как проекции волнового вектора на поперечную плоскость у обобщенных бессель-гауссовых пучков $\mathbf{U}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, \xi)$ и $\mathbf{U}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}, \xi)$ имеет противоположные знаки, в фокальной плоскости будет наблюдаться интерференционная картина. В результате, полная интенсивность излучения пучка $I = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ в предположении четко выделенного кольца ($\rho_0 \gg 1$) будет, с точностью до константы, равна:

$$I(\rho, \xi = 0) \propto \frac{1}{2\pi\rho} \exp\left(-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{\sigma_0^2}\right) \cos\left(a_0(\rho - \rho_0) - \frac{\pi}{2}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\right)^2, \quad (2.26)$$

где функция Гаусса определяет ширину профиля интенсивности, угол наклона a_0 обратно пропорционален периоду интерференции, а фаза пропорциональна оптическому заряду пучка и фиксирует сдвиг интерференционной картины относительно точки $\rho = \rho_0$.

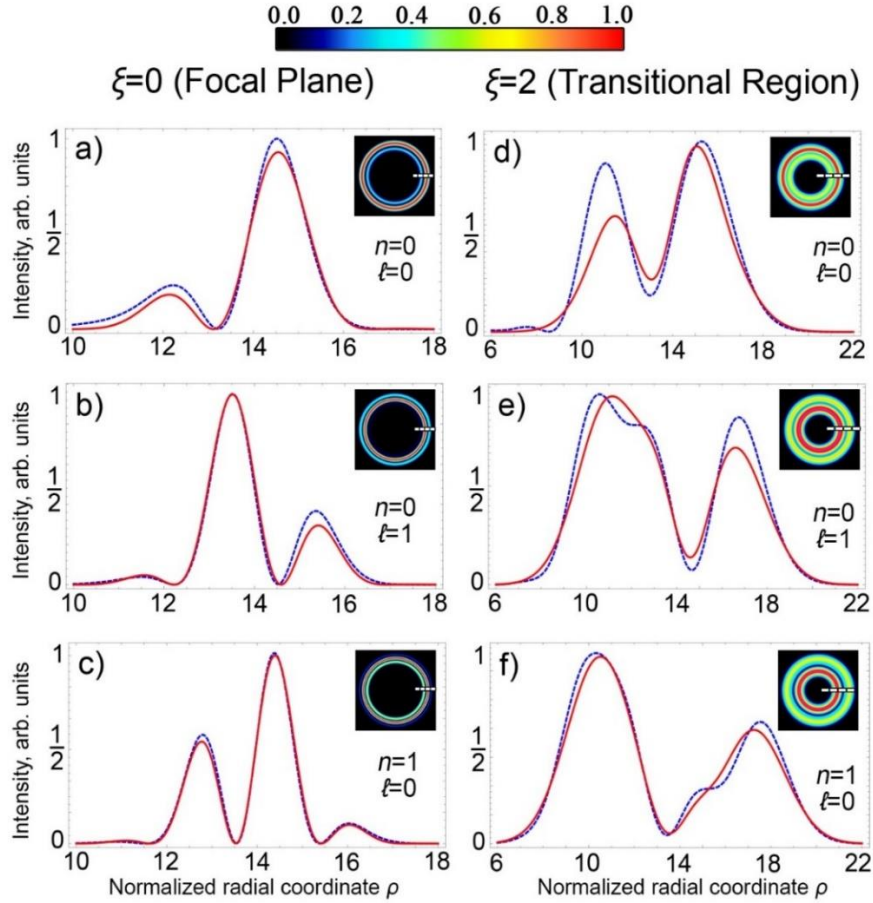


Рисунок 2.5 Профиль радиальной интенсивности пучка конической рефракции, рассчитанный с помощью интегралов двух-конусной модели (2.10) (синяя пунктирная кривая) и с использованием бessel-гауссовой модели (2.5) (красная сплошная кривая). Увеличение модовых индексов ℓ и n приводит к росту количества темных и светлых колец в фокальной (Ллойдовской) плоскости для $\xi=0$ (a-c) и расталкиванию колец Поггендорфа при $\xi=2$ (d-f). Численное моделирование проводилось для $\rho_0=14$ и $n=0, \ell=0$ (a, d), $n=0, \ell=1$ (b, e), $n=1, \ell=0$ (c, f). Соответствующие поперечные распределения интенсивности показаны в правом углу каждого рисунка.

В предыдущем разделе нами было показано, что перетяжка пучка σ_0 слабо зависит от индексов моды ℓ и n , но угол наклона a_0 растет как корень из $2n+|\ell|$. Благодаря этому период интерференции с ростом индексов лаггер-гауссовой моды будет уменьшаться, и при фиксированной области интерференции мы будем наблюдать увеличение количества темных и светлых колец, как показано на Рис. 2.5 (a-c). Поскольку фаза зависит от оптического заряда пучка ℓ , максимум интерференционной картины будет либо справа от точки $\rho=\rho_0$ для четных ℓ , либо слева

для нечетных ℓ . Следует отметить, что формула (2.26) была ранее получена в [A2] для случая $n=0, \ell=0$. Она была использована для феноменологического описания конической рефракции лазерных пучков с $M^2 > 1$.

Также на Рис. 2.5 (d-f) видно, что при удалении от фокальной плоскости на расстояние ξ положительный и отрицательный конус конической рефракции начнут распространяться от и к продольной оси, соответственно. Это приведет к их пространственному разделению и образованию двух ярких колец. При этом расстояние будет тем больше, чем больше значение индексов моды n или $|\ell|$. Отрицательный конус конической рефракции впоследствии сформирует вблизи оси пятно Рамана, свойства которого мы рассмотрим в следующем разделе.

2.6. Пятна Рамана

В фокальной плоскости и вблизи нее, в приближении $\rho_0 \gg 1$, интенсивность компонент поля конуса КР для различных значений орбитального индекса m не отличаются друг от друга, что очевидно следует из формул (2.12)-(2.14). Но вблизи оси ξ , где происходит фокусировка излучения, разные компоненты будут формировать различные пространственные распределения интенсивности т.к. в (2.6) от индекса m зависит порядок модифицированной функции Бесселя [A3]. Следует отметить, что термин «фокусировка» здесь используется в смысле значительного роста интенсивности света в приосевой области, поскольку значение интенсивности непосредственно на оси при $\ell+m > 0$ будет строго нулевым. Рассмотрим, как ведет себя компоненты сходящегося к оси конуса $\mathbf{U}^{(-)}(\rho, \xi)$. Во-первых, рассмотрим поведение аргумента модифицированной функции Бесселя в формуле (2.6), в приближении $\rho \approx 0$ и $\xi \gg 1$:

$$\Upsilon_{Raman} = \rho \left(\frac{\rho_0 - a_0 \xi}{\sigma_0^2 + i \xi} - i a_0 \right). \quad (2.27)$$

Т.к. мы интересуемся областью вблизи оси, кажется, что следует положить радиус кольца $\rho_\xi \approx 0$, но в таком случае аргумент перестанет зависеть от координаты ξ , хотя

из работы Берри [23] мы знаем, что правильная зависимость аргумента функции Бесселя будет даваться выражением:

$$\Upsilon_{Raman} = -i \frac{\rho \rho_0}{\xi}. \quad (2.28)$$

Обратно пропорциональная зависимость от ξ аргумента (2.28) говорит нам о том, что сфокусированное пятно Рамана при дальнейшем распространении вдоль оси ζ будет дифракционным образом уширяться. Таким образом в (2.27) необходимо более аккуратно рассматривать зависимость от продольной координаты ζ .

Так, перенесем в выражении (2.27) всю комплексную часть из знаменателя в числитель, а в знаменателе воспользуемся фактом, что $\zeta \gg 1$, получая:

$$\Upsilon_{Raman} = \rho \left(\frac{\rho_0 - a_0 \xi}{\xi^2} (\sigma_0^2 - i\xi) - ia_0 \right). \quad (2.29)$$

Вещественную часть аргумента можно обнулить из условия $\rho_\xi \approx 0$, а мнимая часть аргумента после простых алгебраических операций в точности будет равна (2.28). Поскольку вблизи формирования пятна Рамана выполняется условие $\zeta \approx \rho_0/a_0$, действительная часть выражения (2.29) обнуляется и остается только мнимая часть, равная соответственно (2.28) и не зависящая от нормированной перетяжки σ_0 . Поскольку аргумент (2.28) полностью мнимый, необходимо заменить модифицированную функцию Бесселя $I_{\ell+m}(-i\rho\rho_0/\zeta)$ на функцию Бесселя $J_{\ell+m}(\rho\rho_0/\zeta)$, что согласуется с результатами работы Берри [23], где рассматривалась асимптотика поля КР вблизи формирования пятен Рамана.

Кроме того, как было показано выше, угол наклона a_0 степенным образом растет с ростом индексов элегантных мод n и ℓ . Из простых геометрических соображений легко понять, что это становится причиной сближения пятен Рамана друг относительно друга с ростом модовых индексов. Чтобы это продемонстрировать, необходимо подробно рассмотреть аргумент функции Гаусса в (2.6):

$$\Upsilon_{Gauss} = -ia_0^2 \frac{\xi}{2} + i\rho_0 a_0 - \frac{(\rho_0 - a_0 \xi)^2}{2(\sigma_0^2 + i\xi)}. \quad (2.30)$$

Перенесем всю комплексную часть из знаменателя в числитель, как это было только что проделано выше, разделяя вещественную и мнимую часть и воспользуемся приближением $\xi \gg 1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Upsilon_{Gauss} &= -\frac{\sigma_0^2 (\rho_0 - a_0 \xi)^2}{2\xi^2}, \\ \operatorname{Im} \Upsilon_{Gauss} &= -a_0^2 \frac{\xi}{2} + \rho_0 a_0 + \frac{(\rho_0 - a_0 \xi)^2}{2\xi}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

В мнимой части необходимо раскрыть квадрат функции $\rho_0 - a_0 \xi$, за счет чего сократятся первые два члена во второй строчке (2.31) и мы получим достаточно компактное выражение:

$$\Upsilon_{Gauss} = -\frac{\sigma_0^2 (\rho_0 - a_0 \xi)^2}{2\xi^2} + \frac{i\rho_0^2}{2\xi}, \quad (2.32)$$

где первое слагаемое в (2.32) определяет форму пятна Рамана вдоль оси ξ , а второе слагаемое дает фазовые осцилляции поля.

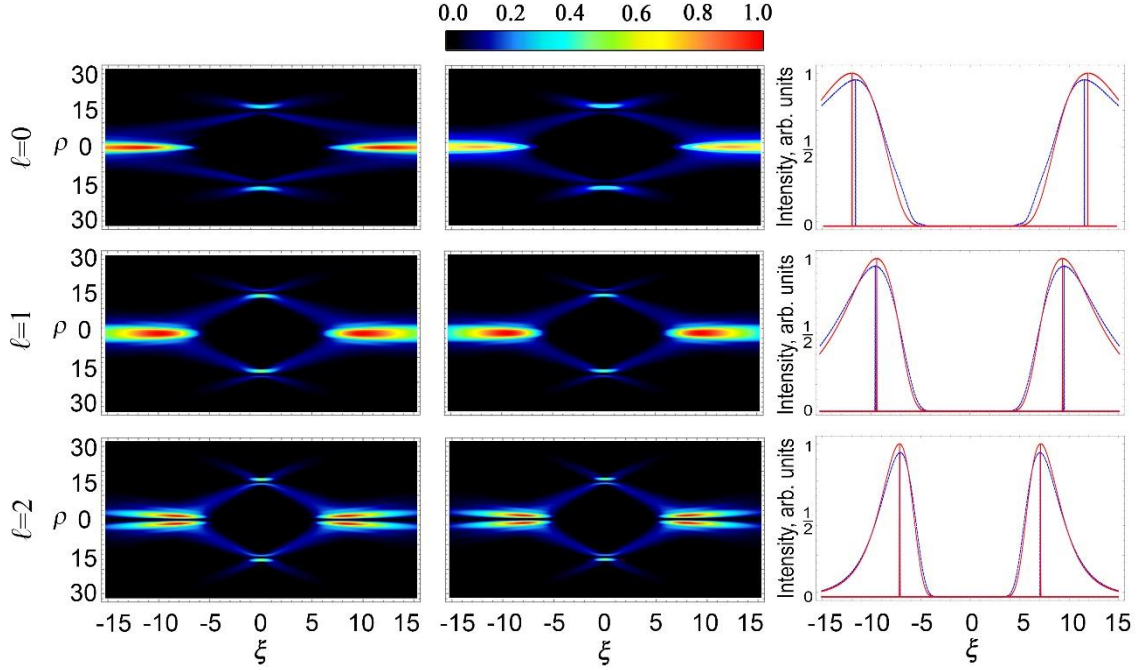


Рисунок 2.6 Пространственная эволюция интенсивности пучка КР рассчитанная с помощью двух-конусной модели КР (2.9) (первый столбец) и бессель-гауссовой модели КР (2.5) (второй столбец) для различных значений ОУМ $\ell=0$ (первая строка), $\ell=1$ (вторая строка) и $\ell=2$ (третья строка) и $\rho_0=15$. Видно, что с ростом ℓ пятна Рамана смещаются ближе к фокальной плоскости. Кроме того, были рассчитаны профили интенсивности пятна Рамана (третий столбец) из точного решения (синяя пунктирная кривая) и БГ модели (красная сплошная кривая) для различных значений ОУМ. При расчете профиля интенсивности мы делили на функцию Бесселя в (2.33), так как для мод более высокого порядка на оси интенсивность обращается в ноль.

Подставляя оба аргумента (2.28) и (2.32) в формулу для поля (2.6), получим:

$$U_m^{(-)}(\rho, \xi) \propto \frac{1}{\xi^{1/2}} \exp\left(-\frac{\sigma_0^2(\rho_0 - a_0\xi)^2}{2\xi^2} + \frac{i\rho_0^2}{2\xi}\right) J_{\ell+m}\left(\frac{\rho\rho_0}{\xi}\right), \quad (2.33)$$

откуда становится очевидным, что максимальное значение экспоненты достигается в точке $\xi \approx \rho_0/a_0$. Это приводит к сближению пятен Рамана друг относительно друга с ростом параметра наклона a_0 . Полученное утверждение проиллюстрировано на Рис. 2.6, на котором рассчитана пространственная эволюция интенсивности пучка КР для различных значений индекса ℓ падающей на кристалл лаггер-гауссовой моды.

Эффект сближения пятен Рамана можно также обнаружить напрямую из теории Бельского-Хапалюка-Берри. Для случая оптического вихря ($n=0$) асимптотическая формула для компонент поля КР вблизи оси ξ имеет вид:

$$C_m^{(-)}(\rho, \xi) \propto \frac{1}{\xi^{\ell+3/2}} \exp\left(-\frac{\rho_0^2}{2\xi^2} + \frac{i\rho_0^2}{2\xi}\right) J_{\ell+m}\left(\frac{\rho\rho_0}{\xi}\right) \quad (2.34)$$

Можно рассчитать, при каком значении продольной координаты в формулах (2.33) и (2.34) экспоненты принимают максимальные значения и получить следующие выражения для теории Бельского-Хапалюка-Берри и бессель-гауссовой модели:

$$\begin{aligned} \xi_{ВНБ} &= \rho_0 \sqrt{\frac{2}{3+2\ell}} \\ \xi_{BG} &= \rho_0 \sqrt{\frac{2}{3+2\ell}} \left(\frac{2\sqrt{3+2\ell}}{\sqrt{1+2\ell} + \sqrt{5+2\ell}} \right) \approx \rho_0 \sqrt{\frac{2}{3+2\ell}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Более наглядное сравнение можно увидеть на Рис. 2.6.

2.7. Перенормировка параметров бессель-гауссовой модели

Как было показано ранее, чтобы перейти от электрического поля конической рефракции элегантного лаггер-гауссова пучка (2.9) к эффективному описанию на основе обобщенных бессель-гауссовых пучков (2.5) необходимо привести фурье-образ поля к виду (2.16). Данное действие позволяет определить параметры бессель-гауссовой модели. Для того чтобы осуществить вышеупомянутое преобразования, ранее мы воспользовались приближением четко-выделенного кольца конической рефракции $\rho_0 \gg 1$, что позволило перейти от Фурье-образа (2.16) к функции гаусса (2.18). Однако, данный переход перестает быть корректным для фиксированного ρ_0 и достаточно большого оптического заряда ℓ . Это можно понять из рассмотрения наблюдаемого радиуса кольца конической рефракции в фокальной плоскости, который перестает быть равным в точности R_0 (ρ_0 в безразмерных единицах) и начинает расти с увеличением оптического заряда ℓ , как показано на Рис. 2.7. Можно

дать простое объяснение данному эффекту, если вспомнить, что максимальная интенсивность оптического вихря с ОУМ ℓ расположена на кольце с радиусом $r_{\max}=w_0\sqrt{\ell}$ ($\rho_{\max}=\sqrt{\ell}$). Поэтому при переходе от области параметров, где $\rho_0 \gg \rho_{\max} \gg 1$, к $\rho_0 \approx 0$, должен происходить плавный переход от максимума кольца КР в точке $\rho=\rho_0$ к ρ_{\max} . Это объясняет зависимость радиуса кольца конической рефракции от ОУМ ℓ , которая показана на Рис. 2.7 (b-c). Таким образом, для случая больших ОУМ ℓ необходимо перенормировать параметры бессель-гауссовой модели.

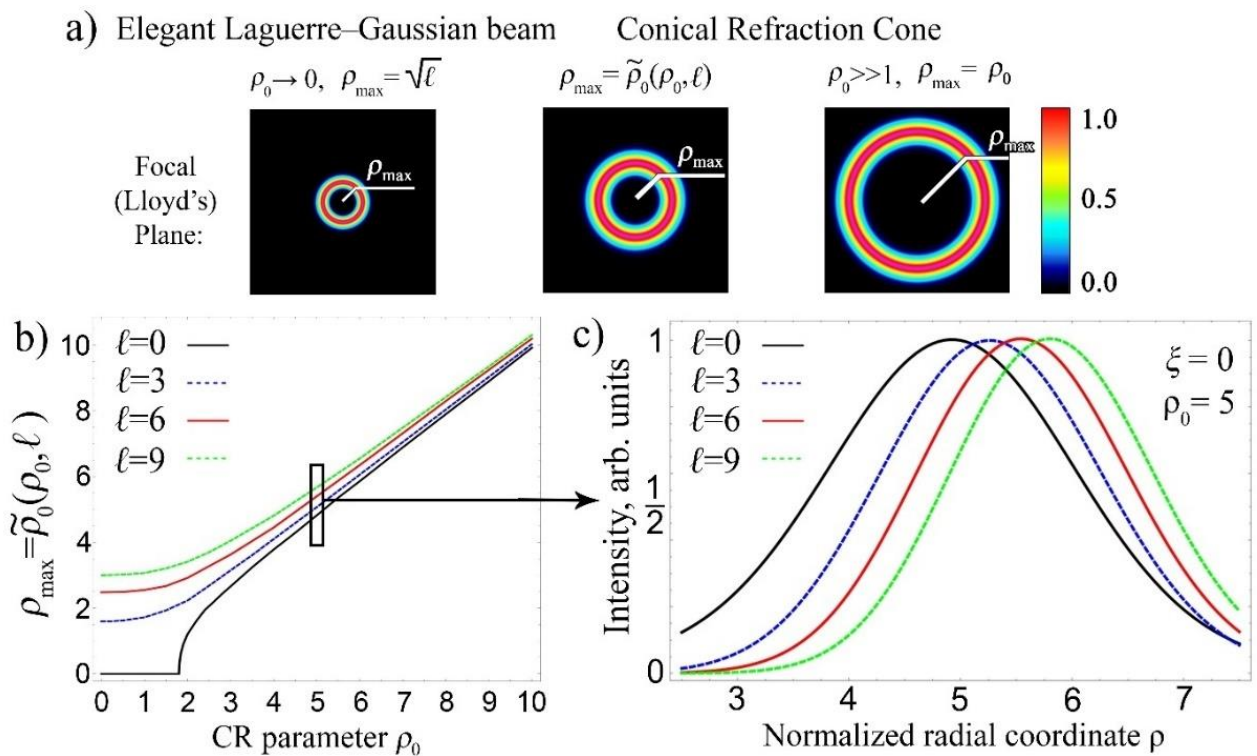


Рисунок 2.7 (а) Поперечное распределение интенсивности конуса КР $C^{(+)}$ для различных значений параметра КР: $\rho_0 \ll 1$ (левый рисунок), где ρ_{\max} – радиус кольца, зависящий от ОУМ ℓ оптического вихря; $\rho_0 \gg 1$ (правый рисунок), где ρ_{\max} полностью определяется параметром КР ρ_0 ; переходная область (средний рисунок), где ρ_{\max} зависит как от значения ОУМ ℓ , так и от параметра КР ρ_0 . (б) Зависимость ρ_{\max} от параметра КР ρ_0 для различных значений ОУМ ℓ . (с) Радиальное распределение интенсивности в фокальной плоскости ($\xi=0$) для конуса КР $C^{(+)}$, рассчитанные с помощью двух-конусной модели КР. Численное моделирование выполнено для $\rho_0=5$ и значений ОУМ $\ell=0$ (черная сплошная кривая), $\ell=3$ (синяя пунктирная кривая), $\ell=6$ (красная сплошная кривая) и для $\ell=9$ (зеленая пунктирная кривая). На рисунке отчетливо видно смещение максимума интенсивности конуса КР с увеличением ОУМ ℓ .

Будем считать, что описание в терминах обобщенных бессель-гауссовых пучков справедливо и в случае больших ОУМ и фурье-образ бессель-гауссова пучка имеет вид:

$$u_m^{(\pm)}(\kappa) = \tilde{A}_0^{(\pm)} \exp(-\sigma_0^2(\kappa^2 + \tilde{a}_0^2)/2) J_{\ell+m}(\kappa \tilde{\tau}^{(\pm)}), \quad (2.36)$$

где $\tilde{A}_0^{(\pm)}$ – перенормированная комплексная амплитуда, $\tilde{\tau}^{(\pm)} = \tilde{\rho}_0 \pm i\sigma_0^2 \tilde{a}_0$, куда входит перенормированный радиус бессель-гауссова пучка $\tilde{\rho}_0$ и перенормированный угол наклона пучка \tilde{a}_0 , которые необходимо найти. Стоит отметить, что мы будем вычислять только первую ненулевую поправку к параметрам бессель-гауссовой модели, так как приближение $\rho_0 \gg 1$ остается справедливым. Таким образом, грубым критерием применимости наших расчетов является условие $\ell < \rho_0$.

Чтобы учесть влияние больших ОУМ ℓ , необходимо рассматривать так называемое “приближение тангенсами” [79] для асимптотического разложения функции Бесселя на бесконечности:

$$J_n\left(\frac{n}{\cos(\alpha)}\right) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n \cdot \operatorname{tg}(\alpha)}} \cos\left(n \operatorname{tg}(\alpha) - n\alpha - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.37)$$

где введено обозначение $\cos(\alpha) = n/x$. Приведем (2.37) к более наглядному виду:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x \sqrt{1 - (n/x)^2}}} \cos\left(x \sqrt{1 - \left(\frac{n}{x}\right)^2} - n \cdot \arccos\left(\frac{n}{x}\right) - \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.38)$$

Из формулы (2.38) становится очевидным, что, при $x \gg n$, (2.38) переходит в стандартную асимптотику функции Бесселя на бесконечности:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right). \quad (2.39)$$

Ограничимся первым порядком разложения по $1/x$ и из (2.38) получим:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{n^2}{2x}\right). \quad (2.40)$$

В нашем случае $x = \kappa \tilde{\tau}^{(\pm)} = \kappa(\tilde{\rho}_0 \pm i\sigma_0^2 \tilde{a}_0)$, т.е. аргумент функции Бесселя – комплексная функция, и $n = \ell + m$, в результате чего, получим:

$$J_{\ell+m}(\kappa \tilde{\tau}^{(\pm)}) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa \tilde{\tau}^{(\pm)}}} \cos\left(\kappa \tilde{\tau}^{(\pm)} - \frac{\pi}{2}\left(\ell + m + \frac{1}{2}\right) + \frac{\ell^2}{2\kappa \tilde{\tau}^{(\pm)}}\right) \quad (2.41)$$

где мы использовали приближение $\ell \gg m$. В результате, фурье-образ (2.36) преобразуется в виду:

$$u_m^{(\pm)}(\kappa) = \tilde{A}_0^{(\pm)} e^{-\frac{\sigma_0^2}{2}(\kappa^2 + \tilde{a}_0^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa \tilde{\tau}^{(\pm)}}} \cos\left(\kappa \tilde{\tau}^{(\pm)} - \frac{\pi}{2}\left(\ell + m + \frac{1}{2}\right) + \frac{\ell^2}{2\kappa \tilde{\tau}^{(\pm)}}\right), \quad (2.42)$$

Разлагая функцию $1/\kappa$ в (2.41) вблизи $\kappa = a_0$ до линейного члена, и выбирая перенормированные параметры так, чтобы формула (2.42) в точности совпадала с (2.17), после несложных алгебраических преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_0 &= \rho_0 \left[1 + q / (\rho_0^2 + \sigma_0^4 a_0^2)\right], \\ \tilde{a}_0 &= a_0 \left(1 - q / (\rho_0^2 + \sigma_0^4 a_0^2)\right), \\ \tilde{A}_0^{(\pm)} &\approx A_0^{(\pm)} \exp\left(\pm i a_0 q / \tau^{(\pm)} + \sigma_0^2 (\tilde{a}_0^2 - a_0^2) / 2\right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где мы ввели обозначение $q = \ell^2 / (2a_0^2)$. Из формулы (2.43) можно сделать вывод, что радиус кольца конической рефракции действительно увеличивается с ростом ℓ . При этом, параметр наклона a_0 также будет увеличиваться с ростом ℓ , но не так быстро, как до перенормировки. Таким образом, было показано, что радиус кольца КР R_0 зависит от величины ОУМ $\hbar \ell$ и полученную зависимость можно естественным образом описать в рамках предлагаемой нами бессель-гауссовой модели КР.

2.8. Коническая рефракция бессель-гауссовых пучков

В предыдущем пункте нами было найдено соответствие между КР элегантных лаггер-гауссовых пучков и обобщенными бессель-гауссовыми пучками. Для того, чтобы изучить полученное соответствие более полно, построим обобщение бессель-гауссовой модели конической рефракции на семейство бессель-гауссовых пучков с произвольным орбитальным угловым моментом [A4]. Перед двусным

кристаллом бessel-гауссов пучок (Рис. 2.8) описывается тремя независимыми параметрами: перетяжкой пучка w_0 , углом под которым лучи сходятся в фокальную плоскость γ ($\gamma_0 = \gamma k w_0$ – в нормированных координатах) и значением оптического заряда ℓ .

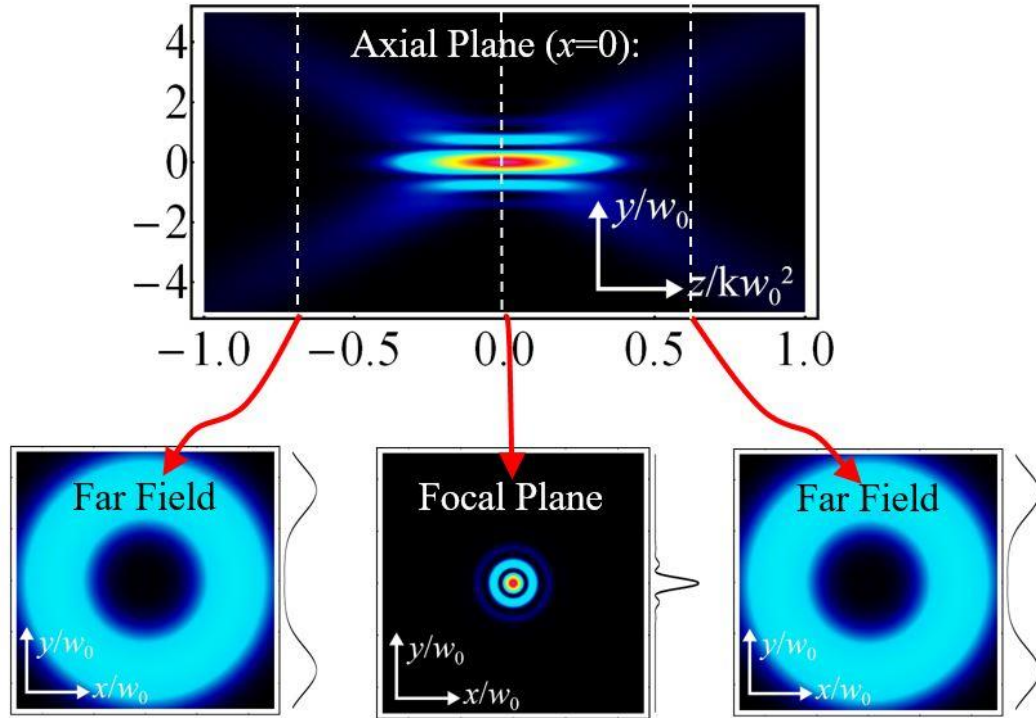


Рисунок 2.8 Пространственная эволюция бessel-гауссова пучка с орбитальным моментом $\hbar\ell=0$ и соответствующие характерные поперечные распределения интенсивности в фокальной плоскости и дальнем поле.

Электрическое поле такого пучка в фокальной плоскости ($\xi = 0$) в прямом и обратном пространстве будет иметь вид:

$$\mathbf{E}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2} + i\ell\varphi\right) J_\ell(\gamma_0\rho)\mathbf{e}_{in}, \quad (2.44)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}(\boldsymbol{\kappa}) = (-i)^\ell \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\gamma_0^2}{2} + i\ell\theta_\kappa\right) I_\ell(\gamma_0\kappa)\mathbf{e}_{in}. \quad (2.45)$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода порядка n и $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка n . Рассмотрим, как изменится бессель-гауссов пучок после распространения вдоль одной из осей двуосного кристалла. Далее будет показано, что кристалл конической рефракции преобразует бессель-гауссов пучок в два обобщенных бессель-гауссовых пучка, изменяя параметры, но не меняя их форму. Так, согласно двух-конусной модели КР, электрическое поле конической рефракции бессель-гауссова пучка будет иметь вид (2.9) и (2.10), где компоненты поля определяются как:

$$c_m^{(\pm)}(\kappa) = \frac{(\pm i)^m}{2} I_\ell(\gamma_0 \kappa) \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\gamma_0^2}{2} \mp i\kappa\rho_0\right). \quad (2.46)$$

Можно аналогично случаю элегантных лаггерр-гауссовых пучков и формуле (2.14) ввести одномерное преобразование Фурье:

$$f(\kappa) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \theta(\kappa) \sqrt{\kappa} I_\ell(\gamma_0 \kappa) \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\gamma_0^2}{2} - i\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right), \quad (2.47)$$

и подставляя его в формулы для определения наклона (2.21) и перетяжки (2.22) пучка конической рефракции, получим:

$$a_0 = \frac{e^{-\frac{\gamma_0^2}{2}} \sqrt{\pi} \gamma_0^{2\ell} \Gamma(1/2 + \ell) {}_2F_2\left(1/2 + \ell, 3/2 + \ell; 1 + \ell, 1 + 2\ell; \gamma_0^2\right) (-1)^\ell}{I_\ell(\gamma_0^2/2) \Gamma(-1/2 - \ell)}, \quad (2.48)$$

$$\sigma_0 = \left[2(1 + \ell - a_0^2) + \gamma_0^2 + \gamma_0^2 \frac{I_{1+\ell}(\gamma_0^2/2)}{I_\ell(\gamma_0^2/2)} \right]^{-1/2},$$

где ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ - обобщенная регуляризованная гипергеометрическая функция, $\Gamma(x)$ – гамма функция. Зависимость параметров пучка после кристалла конической рефракции (2.48) от нормированного угла бессель-гауссова пучка γ_0 и значения углового орбитального момента ℓ показана на Рис. 2.9.

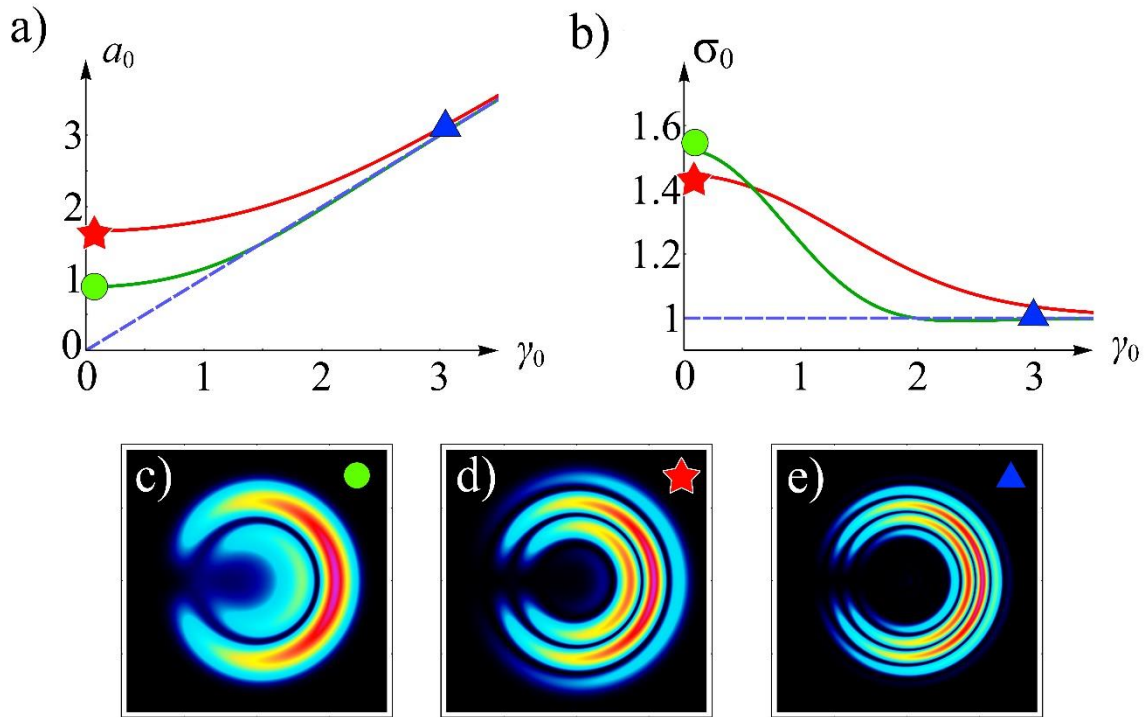


Рисунок 2.9 (a-b) Нормированный угол распространения a_0 (a) и перетяжка пучка σ_0 (b) после прохождения через кристалл конической рефракции как функция от угла изначального бessel-гауссова пучка γ_0 , рассчитанная при помощи бessel-гауссовой модели конической рефракции. Зеленная кривая соответствует бessel-гауссову пучку с орбитальным зарядом равным нулю, а красная кривая описывает пучок с орбитальным зарядом $\ell=2$, синяя пунктирная кривая - асимптотика при больших углах изначального бessel-гауссова пучка. (c-e) Поперечное распределение интенсивности в фокальной плоскости ($\xi=0$) конической рефракции гауссова пучка (c), оптического вихря с $\ell=2$ (d) и бessel-гауссова пучка (e).

При этом видно, что переход от классического двух-кольцевого распределения интенсивности в фокальной плоскости при конической рефракции гауссова пучка (Рис. 1.9c) к многокольцевому распределению интенсивности (Рис. 2.9d-e) может быть осуществлен как за счет увеличения оптического заряда пучка (Рис. 2.9d), так и за счет роста угла бessel-гауссова пучка (Рис. 2.9e). Объяснение этого факта можно получить из Рис. 2.9a, где видно, что угол пучка конической рефракции, определяющий число колец, растет как при увлечении угла изначального бessel-гауссова пучка, так и при росте оптического заряда.

2.9. Коническая рефракция обобщенных бessel-гауссовых пучков

Теперь рассмотрим случай, когда через двусный кристалл проходит обобщенный бessel-гауссов пучок (Рис. 2.10).

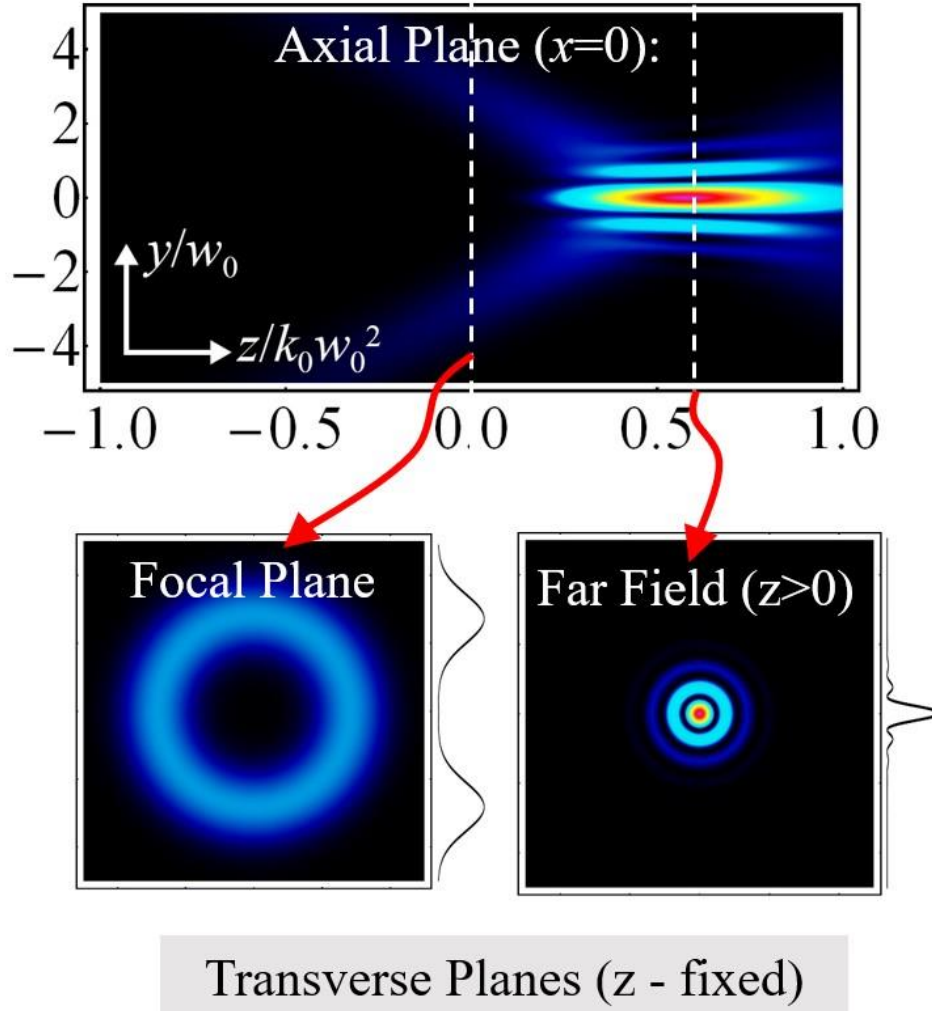


Рисунок 2.10 Пространственная эволюция обобщенного бessel-гауссова пучка с орбитальным моментом $\ell=0$ и соответствующие характерные поперечные распределения интенсивности в ближнем и дальнем поле.

Электрическое поле обобщенного бessel-гауссова пучка в фокальной плоскости ($\xi = 0$) в прямом и обратном пространстве имеет вид:

$$\mathbf{E}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) = (i)^\ell \exp\left(-\frac{\rho^2}{2} + i\ell\varphi\right) I_\ell[(\rho_{in} - i\gamma_0)\rho] \mathbf{e}_{in}, \quad (2.49)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}(\mathbf{\kappa}) = \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\gamma_0^2}{2} + i\ell\theta_\kappa\right) J_\ell[(\rho_{in} - i\gamma_0)\kappa] \mathbf{e}_{in}, \quad (2.50)$$

где $\rho_{in}=R_{in}/w_0$ – нормированный радиус падающего на кристалл обобщенного бессель-гауссова пучка. Когда радиус пучка равен нулю ($\rho_{in}=0$), обобщенный бессель-гауссов пучок преобразуется в обычный бессель-гауссов пучок и формулы (2.49)-(2.50) переходят в (2.44)-(2.45).

После прохождения через двуосный кристалл, электрическое поле конической рефракции обобщенного бессель-гауссова пучка, согласно двух-конусной модели конической рефракции, будет описываться формулами (2.9) и (2.10), где компоненты поля определяются как:

$$c_m^{(\pm)}(\kappa) = \frac{(\pm i)^m}{2} (-i)^\ell J_\ell[(\rho_{in} - i\gamma_0)\kappa] \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\gamma_0^2}{2} \mp i\kappa\rho_0\right). \quad (2.51)$$

На Рис. 2.11 показан численный расчет распределения интенсивности в фокальной плоскости пучка перед и после кристалла конической рефракции для различных значений наклона и радиуса обобщенного бессель-гауссова пучка. Далее, будем считать, что исходный свет был линейно поляризован. Рассмотрим сначала случай гауссова пучка, когда $\gamma_0=\rho_{in}=0$ (Рис. 2.11а). На выходе из кристалла в фокальной плоскости будет наблюдаться классическое двух-кольцевое распределение интенсивности (Рис. 2.11б). Радиус кольца Ллойда в фокальной плоскости равен ρ_0 и определяется параметрами кристалла КР. Теперь, увеличим угол наклона бессель-гауссова пучка γ_0 (Рис. 2.11с), и функция Бесселя начнет накладываться на распределение Гаусса, согласно формуле (2.44). Такая модуляция функцией Бесселя приводит к переходу в фокальной плоскости от двух-кольцевого распределения интенсивности к многокольцевому, как показано на Рис. 2.11d. Теперь, начнем увеличивать радиус входного пучка ρ_{in} (Рис. 2.11е), что приводит к пространственному разделению конусов КР (Рис. 2.11f). Радиус каждого конуса теперь равен $\rho_0 \pm \rho_{in}$, однако

поляризационная структура конусов совпадает. При дальнейшем увеличении радиуса падающего на кристалл пучка ρ_{in} (Рис. 2.11g) внутренний конус проходит через центр, и распределение интенсивности разворачивается на 180° , а поляризационная структура становится противоположной (Рис. 2.11h).

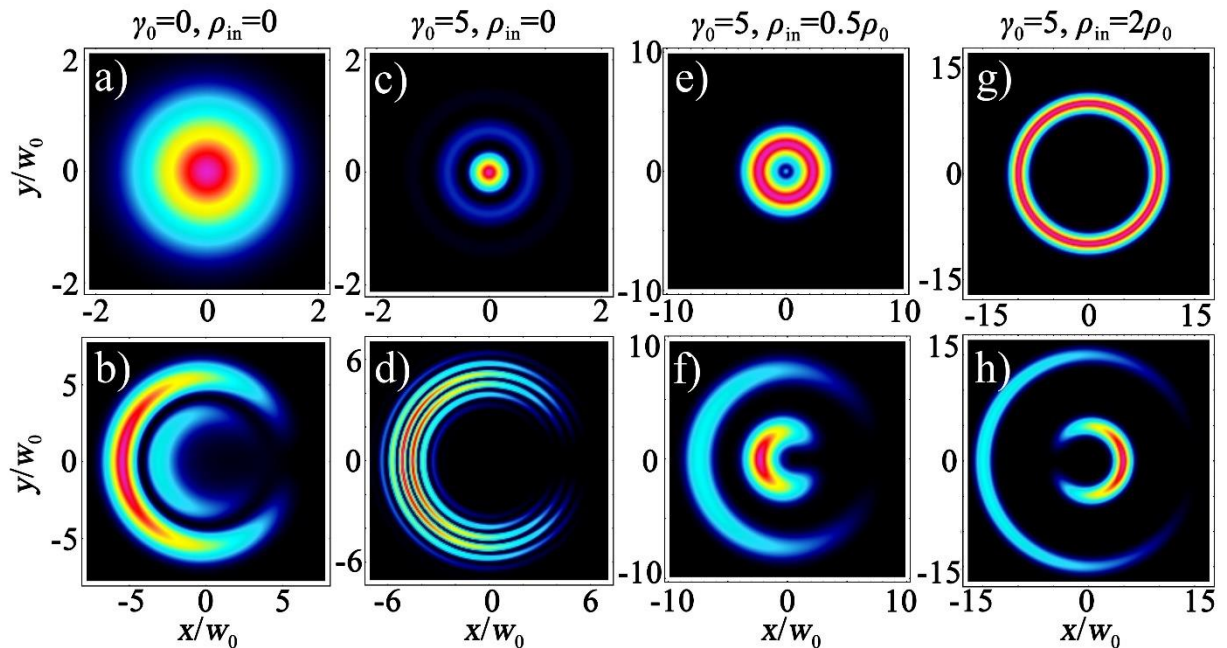


Рисунок 2.11 Распределения интенсивности в фокальной плоскости обобщенных бессель-гауссовых пучков (первая строка) и соответствующих пучков конической рефракции для параметра конической рефракции $\rho_0=5$ и $\ell=0$ (вторая строка). Численные расчеты проводились для значений параметров $\gamma_0=0, \rho_{in}=0$ (a, b), $\gamma_0=5, \rho_{in}=0$ (c, d), $\gamma_0=5, \rho_{in}=0.5\rho_0$ (e, f), и $\gamma=5, \rho_{in}=2\rho_0$ (g, h).

Чтобы получить простое физическое объяснение для разделения конусов при увеличении радиуса исходного пучка, рассмотрим собственные моды кристалла КР. Такие моды имеют взаимно противоположную поляризационную структуру. При этом, радиус первой собственной моды увеличивается после кристалла КР, а радиус второй уменьшается. Рассмотрим эволюцию обобщенного бессель-гауссова пучка внутри кристалла КР (Рис. 2.12a). Перед кристаллом КР показано яркое кольцо с радиусом ρ_{in} и линейной поляризацией (Рис. 2.12b). Такой пучок можно представить в виде суперпозиции двух собственных мод КР. Радиус первой моды внутри кристалла КР будет увеличиваться и радиус второй моды будет уменьшаться, как упоминалось ранее (Рис. 2.12c). Так, когда внутренний пучок проходит

через центр, его распределение интенсивности зеркально отражается. Таким образом, после кристалла КР можно наблюдать две идентичные собственные моды с одинаковой поляризационной структурой (Рис. 2.12с) [A5].

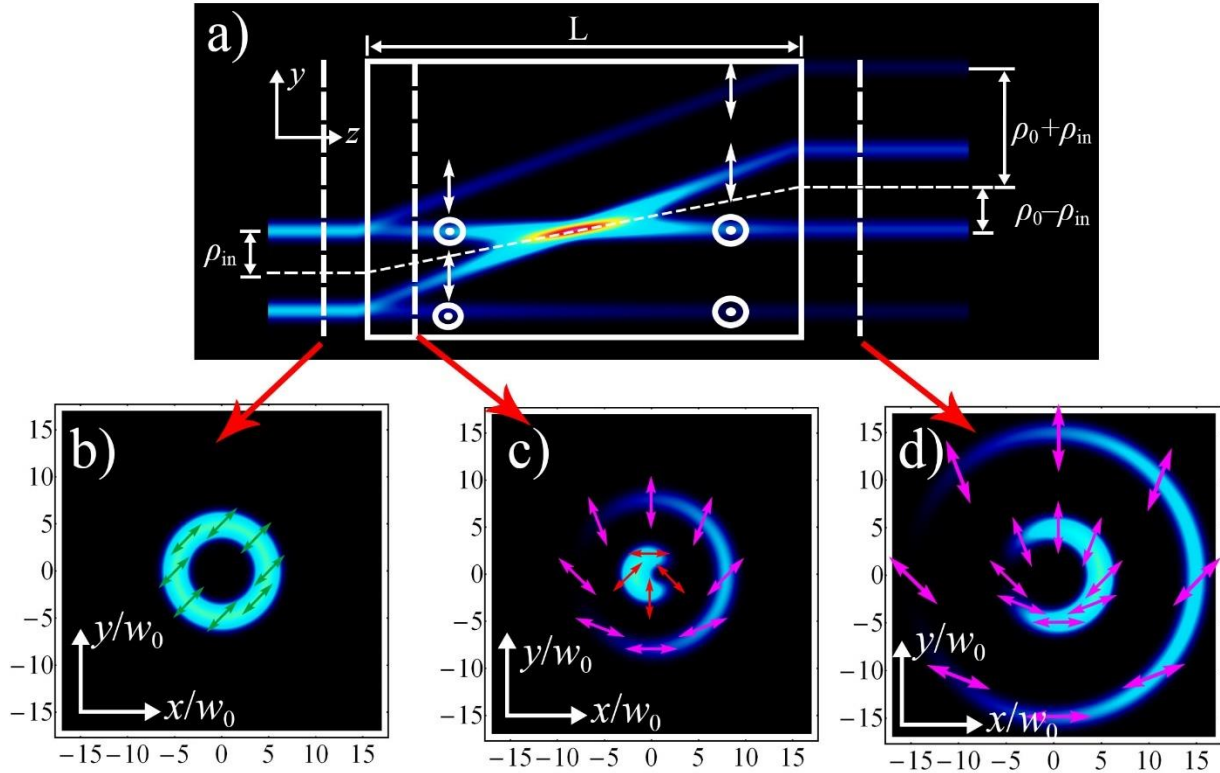


Рисунок 2.12 (а) Пространственная эволюция обобщенного бessel-гауссова пучка внутри двуосного кристалла. (b-d) Характерные поперечные распределения интенсивности пучка в процессе распространения через кристалл.

Теперь рассмотрим, каким образом изменяется пространственная эволюция конической рефракции в зависимости от параметров обобщенного бessel-гауссова пучка. Из Рис. 2.13а-б видно, что при небольшом увеличении радиуса исходного пучка ρ_{in} нарушается симметрия пространственной эволюции пучка конической рефракции (Рис. 2.13б). Так, левое пятно Рамана смещается ближе к фокальной плоскости, а правое наоборот отдалается от нее.

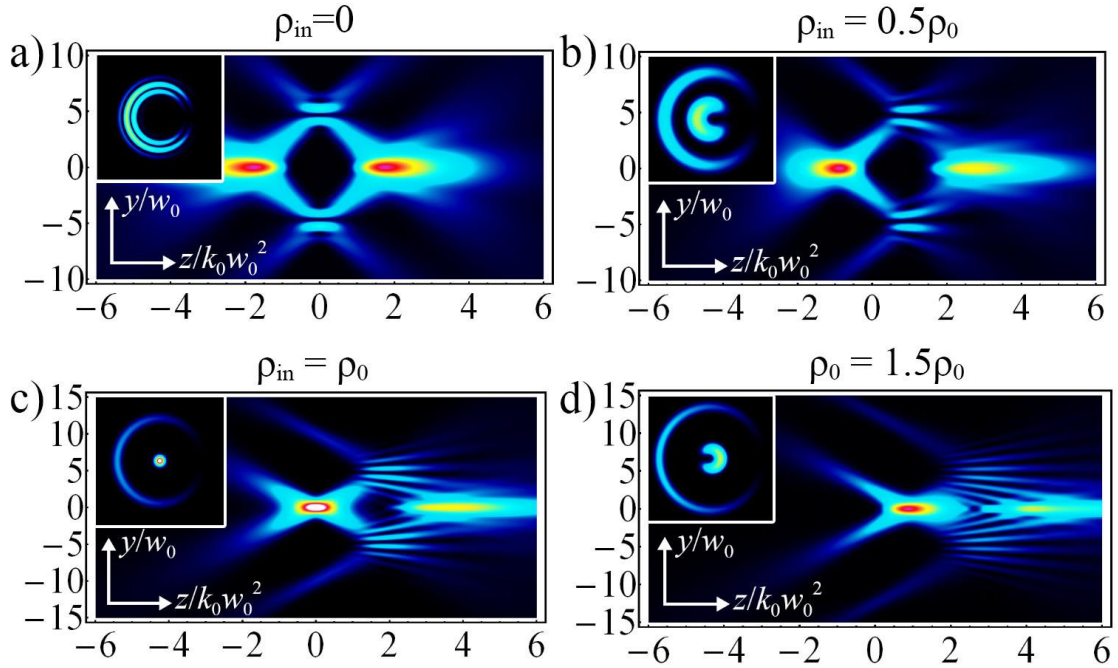


Рисунок 2.13 (a-d) Пространственная эволюция конической рефракции обобщенного бessel-гауссова пучка для различных значений радиуса исходного пучка ρ_{in} . В левом верхнем углу каждого рисунка располагается поперечное распределение интенсивности пучка в фокальной плоскости. Угол наклона исходного пучка $\gamma_0=3$, а орбитальный угловой момент $\ell=0$.

При этом, область пересечения конусов КР, где происходит формирование интерференционной картины, сдвигается в правую сторону от фокальной плоскости. При дальнейшем увеличении радиуса ρ_{in} исходного пучка левое пятно Рамана при $\rho_{in}=\rho_0$ полностью смещается в фокальную плоскость (Рис. 2.13с). Для $\rho_{in}>\rho_0$ оба конуса имеют одинаковый наклон и пятна Рамана начинают перекрываться в правой полуплоскости (Рис. 2.13d), за счет чего формируются интерференционные структуры, похожие на капельные пучки [80] или оптические капсулы [81].

2.10. Краткие итоги

- Было показано, что коническая рефракция элегантных лаггер-гауссовых пучков может быть эффективно описана через обобщенные бessel-гауссовы пучки. Полученное представление имеет неинтегральную структуру и справедливо во всех пространственных областях, включая фокальную плоскость и дальнее поле.

- Определены параметры бессель-гауссовой модели. Проведено численное моделирование пространственной эволюции интенсивности конической рефракции элегантного лаггер-гауссова пучка для различных модовых индексов и продемонстрировано хорошее согласие между теорией Бельского-Хапалюка-Берри и предложенной бессель-гауссовой моделью. Кроме того, в рамках бессель-гауссовой модели получено изящное объяснение перехода от классического двухкольцевого к многокольцевому распределению интенсивности конической рефракции в фокальной плоскости при увеличении оптического заряда падающего на кристалл света [19]. Примечательно, что математическая элегантность и физическая наглядность предложенной бессель-гауссовой модели позволили нам предсказать новые явления, такие как сближение пятен Рамана и зависимость радиуса кольца конической рефракции от величины орбитального углового момента света.
- Полученная модель применена для описания конической рефракции бессель-гауссовых пучков. Также была рассмотрена коническая рефракция обобщенных бессель-гауссовых пучков и предсказаны новые эффекты, такие как сдвиг ллойдовской плоскости, инверсия пятен Рамана и формирование бутылочных пучков в дальнем поле пучка.

Глава 3 Коническая рефракция частично когерентного излучения

3.1. Краткое введение

Исследование конической рефракции нетривиальных оптических пучков в настоящее время является одной из самых новых и интригующих областей исследований. В недавних публикациях сообщается о конической рефракции цилиндрических [82], бесселевых [83] и бесель-гауссовых [84], многомодового излучения [85], и конической рефракции векторных пучков с изменяющимся в пространстве состоянием поляризации [86]. В связи с этим изучение конической рефракции частично когерентного излучения также становится важным и перспективным направлением. Низкокогерентные источники света, такие как лазерные диоды и светодиоды, отличаются значительной простотой, компактностью и экономичностью, что позволит создать новые или улучшить уже известные практические применения конической рефракции. Кроме того, пространственная когерентность дает дополнительную возможность управлять свойствами света, помимо уникальных особенностей фазового фронта, поляризации и пространственной эволюции конической рефракции. Как будет показано далее, коническая рефракция частично когерентного излучения позволяет генерировать структурированный свет, который в настоящее время представляет большой интерес для теоретических и экспериментальных исследований [1]. Можно назвать несколько примеров структурированного света с возможностью управления когерентностью: частично когерентные векторные пучки [87], которые сочетают в себе особенности, связанные с поляризацией и когерентностью, и когерентные вихри [88], которые представляют собой частично когерентный свет с ОУМ. Пучки конической рефракции частично когерентного излучения сочетают в себе уникальные особенности как векторных/вихревых пучков, так и частично когерентного света. Создание теории таких пучков может значительно упростить применения структурированного света, связанные с оптическим когерентным шифрованием [89], оптической связью в свободном пространстве [90] и созданием пучков требуемой формы [91].

В данном разделе мы расширим параксиальную модель конической рефракции на случай света с частичной пространственной когерентностью, используя единую теорию оптической когерентности. Для проведения численных расчетов, мы используем представление взаимной спектральной плотности гауссовского источника модели Шелла по когерентным модам. Данное представление позволит нам выразить корреляционные функции излучения за кристаллом через хорошо известные интегралы конической рефракции. Для получения аналитических результатов, фаза электрического поля входного пучка считалась случайной величиной, что позволило переформулировать и существенно упростить строгую теорию конической рефракции частично когерентного излучения. Данный подход позволит рассматривать распространение света через двуосный кристалл точно так же, как и в случае когерентного излучения. В результате, будет аналитически и численно рассчитана интенсивность излучения конической рефракции частично когерентного света как в фокальной плоскости, так и в дальнем поле. Это позволит нам объяснить и строго обосновать ранее полученные экспериментальные данные и предсказать новые явления. К последним относятся контринтуитивный эффект сужения ширины кольца конической рефракции, исчезновение темного кольца Поггендорфа в плоскости Ллойда и смещение пятен Рамана для низкокогерентного излучения. Мы также продемонстрируем универсальную степенную зависимость степени когерентности конусов конической рефракции от длины когерентности и бездифракционное распространение пучка конической рефракции низкокогерентного излучения в дальнем поле.

3.2. Теория конической рефракции частично когерентного излучения

Построим теорию конической рефракции излучения с частичной пространственной когерентностью [Аб]. Для этого будем считать вектор падающего на кристалл электрического поля $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{p}) = \mathcal{E}(\mathbf{p})[d_L, d_R]$ случайной функцией от поперечной координаты. В этом случае вся информация о статистических свойствах поля со-

держится в наборе корреляционных функций. Далее мы сосредоточимся на корреляционных функциях второго порядка, которые можно использовать для построения матрицы взаимных спектральных плотностей. Элементы этой матрицы имеют вид:

$$\langle E_i^{(0)}(\mathbf{p}_1)^* E_j^{(0)}(\mathbf{p}_2) \rangle_{\text{All}} = W^{(0)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) J_{ij}, \quad (3.1)$$

где $\langle \dots \rangle_{\text{All}}$ - усреднение по ансамблю всех возможных реализаций стохастического вектора электрического поля, включая усреднение как по поляризационным, так и по пространственным степеням свободы; $W^{(0)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \langle \mathcal{E}(\mathbf{p}_1)^* \mathcal{E}(\mathbf{p}_2) \rangle$ - взаимная спектральная плотность падающего на кристалл излучения, содержащая усреднение только по случайной комплексной амплитуде электрического поля $\mathcal{E}(\mathbf{p})$; $J_{ij} = \langle d_i^* d_j \rangle_{\text{Polarization}}$ - матрица когерентности [26]. В уравнении (3.1) предполагается, что поляризация света не зависит от поперечной координаты.

Матрица взаимных спектральных плотностей излучения после кристалла КР вводится по аналогии с формулой (3.1) и имеет вид:

$$K_{ij}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \xi) = \langle E_i(\mathbf{p}_1, \xi)^* E_j(\mathbf{p}_2, \xi) \rangle_{\text{All}}, \quad (3.2)$$

где удобно будет разделить поляризационные и пространственные степени свободы по аналогии с уравнением (3.1). Для этого воспользуемся явным видом электрического поля излучения (1.20) и преобразуем выражение (3.2) к виду:

$$K_{ij}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \xi) = \sum_{k,s=R,L} \langle \beta_{ik}^*(\mathbf{p}_1, \xi) \beta_{js}(\mathbf{p}_2, \xi) \rangle J_{ks}, \quad (3.3)$$

где мы ввели матрицу β :

$$\hat{\beta}(\mathbf{p}, \xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0(\mathbf{p}, \xi) & \mathbf{B}_{-1}(\mathbf{p}, \xi) \\ \mathbf{B}_1(\mathbf{p}, \xi) & \mathbf{B}_0(\mathbf{p}, \xi) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

элементами которой являются компонентами поля КР (1.20). Из уравнения (3.4) очевидно, что каждая компонента $\langle \beta_{ik}^* \beta_{js} \rangle$ выражается через средние вида $\langle \mathbf{B}_v^* \mathbf{B}_\mu \rangle$.

В результате, для упрощения формулы (3.3), необходимо ввести дополнительную матрицу, элементы которой будут иметь следующий вид:

$$W_{\nu\mu}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \xi) = \langle \mathbf{B}_\nu(\boldsymbol{\rho}_1, \xi)^* \mathbf{B}_\mu(\boldsymbol{\rho}_2, \xi) \rangle, \quad (3.5)$$

похожий на взаимную спектральную плотность падающего на кристалл излучения $W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$ в уравнении (3.1). Похожая матрица была введена в недавней работе [27] и названа матрицей когерентности ОУМ (КОУМ), так как она определяет корреляцию между компонентами поля с ОУМ, равным $\hbar\nu$ и $\hbar\mu$. Связь между компонентами матрицы взаимных спектральных плотностей (3.2), введенной матрицей КОУМ (3.5) и матрицей когерентности имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} K_{LL} \\ K_{RR} \\ K_{LR} \\ K_{RL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{00} & W_{-1-1} & W_{0-1} & W_{-10} \\ W_{11} & W_{00} & W_{10} & W_{01} \\ W_{01} & W_{-10} & W_{00} & W_{-11} \\ W_{10} & W_{0-1} & W_{1-1} & W_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{LL} \\ J_{RR} \\ J_{LR} \\ J_{RL} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Зная соотношение (3.6), нетрудно найти связь между интенсивностью КР и матрицей КОУМ $W_{\mu\nu}$. Чтобы получить данное соотношение, нужно переписать матрицу взаимных спектральных плотностей и матрицу когерентности в терминах параметров Стокса [26]:

$$\hat{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, \xi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_0(\boldsymbol{\rho}, \xi) + S_3(\boldsymbol{\rho}, \xi) & S_1(\boldsymbol{\rho}, \xi) + iS_2(\boldsymbol{\rho}, \xi) \\ S_1(\boldsymbol{\rho}, \xi) - iS_2(\boldsymbol{\rho}, \xi) & S_0(\boldsymbol{\rho}, \xi) - S_3(\boldsymbol{\rho}, \xi) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_0 + s_3 & s_1 + is_2 \\ s_1 - is_2 & s_0 - s_3 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.7) и (3.8) в (3.6), получим выражение для вектора Стокса КР:

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{00} + \frac{1}{2}(W_{11} + W_{-1-1}) & \text{Re}[W_{01} + W_{0-1}] & \text{Im}[W_{01} - W_{0-1}] & \frac{1}{2}(W_{11} - W_{-1-1}) \\ \text{Re}[W_{01} + W_{0-1}] & W_{00} + \text{Re}[W_{-11}] & \text{Im}[W_{-11}] & \text{Re}[W_{01} - W_{0-1}] \\ \text{Im}[W_{01} - W_{0-1}] & \text{Im}[W_{-11}] & W_{00} - \text{Re}[W_{-11}] & \text{Im}[W_{01} + W_{0-1}] \\ -\frac{1}{2}(W_{11} - W_{-1-1}) & -\text{Re}[W_{01} - W_{0-1}] & -\text{Im}[W_{01} + W_{0-1}] & W_{00} - \frac{1}{2}(W_{11} + W_{-1-1}) \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

где мы используем свойство матрицы КОУМ $W_{\nu\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \xi) = W_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \xi)^*$, справедливое для $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$. В результате интенсивность КР будет равна:

$$I(\mathbf{p}, \xi) = \left[W_{00} + \frac{1}{2}(W_{11} + W_{-1-1}), \operatorname{Re}[W_{01} + W_{0-1}], \right. \\ \left. \operatorname{Im}[W_{0-1} - W_{01}], \frac{1}{2}(W_{-1-1} - W_{11}) \right]_{\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}} \cdot \mathbf{s}, \quad (3.10)$$

где $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ - вектор Стокса входного излучения. Для неполяризованного света входной вектор Стокса $\mathbf{s} = (1, 0, 0, 0)$, и уравнение (3.10) преобразуется к виду:

$$I(\mathbf{p}, \xi) = W_{00}(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \xi) + \frac{1}{2}W_{11}(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \xi) + \frac{1}{2}W_{-1-1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \xi), \quad (3.11)$$

аналогично формуле (1.19) для когерентного излучения.

Также будет полезно ввести частичную пространственную когерентность и в двух-конусную модель КР [24,92]. В ее рамках вектор электрического поля за двух-осным кристаллом можно представить в виде суммы двух конусов КР: $\mathbf{E} = \mathbf{C}^{(+)} + \mathbf{C}^{(-)}$, где $\mathbf{C}^{(+)}$ - положительный или расходящийся конус, а $\mathbf{C}^{(-)}$ - отрицательный или сходящийся конус, соответственно. Матрица КОУМ для двух-конусной модели вводится по аналогии с (3.5):

$$V_{\nu\mu}^{(\sigma_1\sigma_2)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \xi) = \left\langle C_{\nu}^{(\sigma_1)}(\mathbf{p}_1, \xi)^* C_{\mu}^{(\sigma_2)}(\mathbf{p}_2, \xi) \right\rangle, \quad (3.12)$$

где $\sigma_{1,2} = \pm$. В результате введенные функции (3.12) определяют корреляции между компонентой конуса КР с индексом σ_1 и дополнительным ОУМ $\hbar\nu$ и компонентой с индексом σ_2 и дополнительным ОУМ $\hbar\mu$. Связь между корреляционными функциями для теории Бельского–Хапалюка–Берри (3.5) и двух-конусной моделью (3.12) имеет вид:

$$W_{\nu\mu}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \xi) = \sum_{\sigma_1, \sigma_2 = \pm} V_{\nu\mu}^{(\sigma_1\sigma_2)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \xi), \quad (3.13)$$

где необходимо просуммировать по всем индексам, связанным с конусами КР.

Теперь выразим матрицу КОУМ через взаимную спектральную плотность излучения, падающего на кристалл. Для теории Бельского–Хапалюка–Берри подставим (1.20) в (3.5) и получим следующее соотношение:

$$W_{\nu\mu}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \xi) = \int \frac{d\mathbf{k}_1}{2\pi} \frac{d\mathbf{k}_2}{2\pi} \exp[-i(\mathbf{k}_1 \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2 \mathbf{p}_2)] \tilde{G}_\nu(\mathbf{k}_1, \xi)^* \tilde{G}_\mu(\mathbf{k}_2, \xi) \tilde{W}^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad (3.14)$$

Где $\tilde{W}^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ - преобразование Фурье взаимной спектральной плотности излучения:

$$\tilde{W}^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \int \frac{d\mathbf{p}_1}{2\pi} \frac{d\mathbf{p}_2}{2\pi} \exp[i(\mathbf{k}_1 \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2 \mathbf{p}_2)] W^{(0)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2). \quad (3.15)$$

Для двух-конусной модели КР аналогичная (3.15) формула может быть получена путем подстановки (1.24) в (3.12):

$$V_{\nu\mu}^{(\sigma_1\sigma_2)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \xi) = \int \frac{d\mathbf{k}_1}{2\pi} \frac{d\mathbf{k}_2}{2\pi} \exp[-i(\mathbf{k}_1 \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2 \mathbf{p}_2)] \tilde{G}_\nu^{(\sigma_1)}(\mathbf{k}_1, \xi)^* \tilde{G}_\mu^{(\sigma_2)}(\mathbf{k}_2, \xi) \tilde{W}^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \quad (3.16)$$

В результате после расчета интеграла (3.14) или (3.16) можно получить полную информацию об эффектах когерентности второго порядка [26] для поля КР. Однако численный расчет многомерных интегралов (3.14) или (3.16) требует больших вычислительных ресурсов. Далее, мы значительно упростим полученные выражения теории КР частично когерентного излучения, выразив корреляционные функции в терминах интегралов теории Бельского-Хапалюка-Берри [23,93] и двух-конусной модели КР [24,92].

3.3. Гауссовский источник модели Шелла

В этом разделе, в качестве источника излучения, мы рассмотрим гауссовский источник модели Шелла [26]. Его взаимная спектральная плотность имеет следующий вид:

$$W^{(0)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \mathcal{E}^{(0)}(\mathbf{p}_1)^* \mathcal{E}^{(0)}(\mathbf{p}_2) g(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (3.17)$$

где $\mathcal{E}^{(0)}(\boldsymbol{\rho})$ – комплексная амплитуда детерминированного электрического поля в фокальной плоскости; $g(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)$ – степень пространственной когерентности. Для гауссовского источника модели Шелла, который мы будем рассматривать далее, амплитуда поля и степень когерентности имеют следующий вид [26]:

$$\mathcal{E}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) = \exp\left[-\boldsymbol{\rho}^2 / 2\right], \quad g(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1) = \exp\left[-\Delta^2(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2 / 2\right], \quad (3.18)$$

где параметр когерентности $\Delta = w_0/R_C$ – это отношение перетяжки пучка w_0 к длине когерентности или корреляционной длине R_C . Параметр когерентности служит мерой «степени глобальной когерентности» источника света [26]. В случае малого параметра когерентности ($\Delta \ll 1$) степень когерентности приблизительно равна единице и остается практически неизменной, на характерном масштабе изменения интенсивности. Это означает, что источник можно назвать относительно когерентным в глобальном смысле. Напротив, когда параметр когерентности велик ($\Delta \gg 1$), степень когерентности спадает на масштабах, намного меньших, чем перетяжка пучка, w_0 , т. е. можно сказать, что источник излучения является относительно некогерентным в глобальном смысле.

3.4. Представление по когерентным модам

Хорошо известно, что теорема Мерсера может быть использована для гауссовского источника модели Шелла, и взаимная спектральная плотность (3.17) может быть выражена в виде [94]:

$$W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda_{n,\ell} F_{n,\ell}(\rho_1 / \sigma_{\text{eff}}) F_{n,\ell}(\rho_2 / \sigma_{\text{eff}}) \exp[-i\ell(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (3.19)$$

$$\Lambda_{n,\ell} = n!(2t)^{2n+|\ell|} (1-4t^2) / (n+|\ell|)!; \quad t = \Delta^2 / 2(1 + \Delta^2 + \sqrt{1 + 2\Delta^2}), \quad (3.20)$$

$$F_{n,\ell}(u) = u^{|\ell|} L_n^{|\ell|}(u^2) \exp(-u^2 / 2), \quad (3.21)$$

где $L_n^\ell(x)$ – обобщенный полином Лагерра, $\sigma_{\text{eff}} = 1/(1+2\Delta^2)^{1/4}$ – безразмерная эффективная ширина моды; а $F_{n,\ell}(u)\exp(i\ell\varphi)$ и $\Lambda_{n,\ell}$ – собственные функции и собственные

значения интегрального уравнения, ядром которого является взаимная спектральная плотность [26]. Представление (3.19) можно интерпретировать следующим образом: каждое слагаемое в сумме есть взаимная спектральная плотность для полностью когерентной лагерр–гауссовой моды. Собственные значения, $\Lambda_{n,\ell}$, определяют “силу”, с которой разные моды вносят вклад в общую энергию всего луча [95]. В то же время моды с разными индексами взаимно некоррелированы друг с другом.

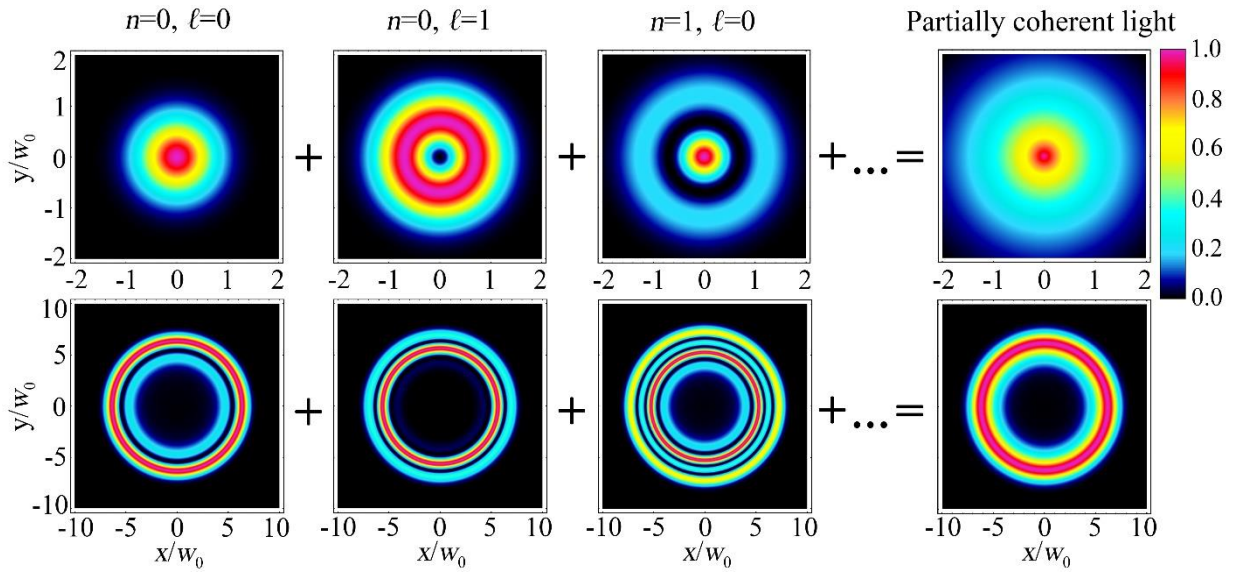


Рисунок 3.1 Наглядная иллюстрация разложения по когерентным модам для частично когерентного света до (первый ряд) и после кристалла КР в фокальной плоскости (второй ряд). В первом столбце показано поперечное распределение интенсивности полностью когерентного гауссова пучка ($n=0, \ell=0$). Во втором и третьем столбцах показаны лагерр-гауссовы моды с индексами $n=0, \ell=1$ и $n=1, \ell=0$. Их некогерентное сложение с другими лагерр-гауссовыми модами приводит к формированию частично когерентного излучения, как показано в последнем столбце. Численное моделирование проводилось при $\rho_0=6$ и $\Delta=1.25$.

Подставляя в выражение для матрицы КОУМ (3.5) когерентное представление гауссовского источника модели Шелла (3.19), после несложных алгебраических вычислений получим следующее выражение [A7]:

$$W_{\nu\mu}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \xi) = e^{-i\nu\varphi_1 + i\mu\varphi_2} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda_{n,\ell} B_{\nu,n,\ell}(\mathbf{p}_1, \xi)^* B_{\mu,n,\ell}(\mathbf{p}_2, \xi) e^{-i\ell(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (3.22)$$

где $B_{\mu,n,\ell}(\rho, \xi)$ - ставшие уже классическими интегралы Бельского–Хапалюка–Берри [23,93]:

$$B_{\mu,n,\ell}(\rho, \xi) = \sigma_{\text{eff}}^2 \int_0^{+\infty} d\kappa \kappa F_{n,\ell}(\kappa \sigma_{\text{eff}}) \cos(\kappa \rho_0 - \mu \frac{\pi}{2}) e^{-i\kappa^2 \xi/2} J_{\ell+\mu}(\kappa \rho), \quad (3.23)$$

где J_m - функция Бесселя первого рода порядка m . Для совпадающих ОУМ ($\nu=\mu$) элементы матрицы КОУМ (3.22) пропорциональны $\exp[i\mu(\varphi_2-\varphi_1)]$, а это означает, что КР частично когерентного света может быть представлена через частично когерентные вихри [88], имеющие аналогичную вихревую особенность во взаимной спектральной плотности.

Для двух-конусной модели КР представление по когерентным модам аналогично уравнению (3.22):

$$V_{\nu\mu}^{(\sigma_1\sigma_2)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \xi) = e^{-i\nu\varphi_1 + i\mu\varphi_2} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda_{n,\ell} C_{\nu,n,\ell}^{(\sigma_1)}(\rho_1, \xi)^* C_{\mu,n,\ell}^{(\sigma_2)}(\rho_2, \xi) e^{-i\ell(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad (3.24)$$

где $C_{\mu,n,\ell}^{(\sigma)}(\rho, \xi)$ – интеграл двух-конусной модели КР [24,92]:

$$C_{\mu,n,\ell}^{(\pm)}(\rho, \xi) = \frac{1}{2} (\pm i)^\mu \sigma_{\text{eff}}^2 \int_0^{+\infty} d\kappa \kappa F_{n,\ell}(\kappa \sigma_{\text{eff}}) \exp(\mp i\kappa \rho_0) e^{-i\kappa^2 \xi/2} J_{\ell+\mu}(\kappa \rho). \quad (3.25)$$

В результате, используя представление по когерентным модам гауссовского источника модели Шелла, показано, что матрицу КОУМ для КР частично когерентного излучения можно выразить через одномерные интегралы теории Бельского–Хапалюка–Берри и двух-конусной модели КР, как это наглядно демонстрируется на Рис. 3.1. Однако само представление по когерентным модам не дает интуитивной физической интерпретации происходящих явлений, возникающих при конической рефракции частично когерентного излучения. Далее нами будет развит аналитический подход, который позволит добиться понимания физических процессов, связанных с конической рефракцией частично когерентного излучения.

3.5. Псевдо-модовое представление источника модели Шелла

Попробуем выразить взаимную спектральную плотность (3.17) через когерентные пучки, пространственная эволюция которых определялась бы простым и понятным законом по аналогии с представлением по когерентным легерр-гауссовым модам (3.19). Для этого, воспользуемся псевдо-модовым представлением источника модели Шелла [96] и перепишем формулу (3.17) в виде [A8]:

$$W^{(0)}(\rho_1, \rho_2) = \int p(\mathbf{q}) \mathcal{E}^*(\mathbf{q}, \rho_1) \mathcal{E}(\mathbf{q}, \rho_2) \frac{d\mathbf{q}}{2\pi}, \quad (3.26)$$

где $p(\mathbf{q})$ — неотрицательная функция, а $\mathcal{E}(\mathbf{q}, \rho)$ — произвольное ядро. Для гауссовского источника модели Шелла, характеризуемого гауссовским профилем интенсивности и степенью когерентности (3.18), имеем следующее определение для $p(\mathbf{q})$ и $\mathcal{E}(\mathbf{q}, \rho)$:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{q}) &= \tilde{g}(\mathbf{q}) = \exp[-\mathbf{q}^2 / 2\Delta^2] / \Delta^2, \\ \mathcal{E}(\mathbf{q}, \rho) &= \mathcal{E}^{(0)}(\rho) \exp[i\mathbf{q}\rho] = \exp[-\rho^2 / 2 + i\mathbf{q}\rho], \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $\tilde{g}(\mathbf{q})$ - преобразование Фурье степени пространственной когерентности $g(\rho)$. Формулы (3.26)-(3.27) можно физически интерпретировать следующим образом: до кристалла КР электрическое поле $\mathcal{E}(\mathbf{q}, \rho)$ имело детерминированную амплитуду $\mathcal{E}^{(0)}(\rho)$, но флуктуирующую фазу $\Phi = \mathbf{q}\rho$ [97]. Таким образом, усреднение по ансамблю реализаций данного случайного процесса можно понимать, как интегрирование по всем возможным случайным волновым векторам \mathbf{q} с весовой функцией $\tilde{g}(\mathbf{q})$. При этом, весовая функция содержит всю информацию о когерентности исходного излучения. В недавней работе также обсуждалось сходство между различными подходами [98], такими как псевдо-модовое представление (3.26) и представление по когерентным модам (3.19), и было показано, что оба представленных метода эквивалентны для рассмотрения эффектов когерентности второго порядка, включая распределение интенсивности и степень когерентности. Таким образом,

псевдо-модовое представление (3.26) и исходная взаимная спектральная плотность (3.17) описывают в точности один и тот же частично когерентный источник.

В результате представление (3.26) позволяет существенно упростить вычисление корреляционных функций КР частично когерентного излучения. Сначала необходимо рассчитать КР пучка с комплексной амплитудой $\mathcal{E}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})$, зависящей от случайного волнового вектора \mathbf{q} :

$$C_{\mu}^{(\pm)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}, \xi) = \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \exp(i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}) \tilde{G}_{\mu}^{(\pm)}(\mathbf{k}, \xi) \tilde{\mathcal{E}}^{(0)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (3.28)$$

Затем, используя рассчитанное выражение (3.28) для поля КР, после усреднения по случайному волновому вектору можно получить матрицу КОАМ (3.12) по аналогии с (3.26):

$$V_{\nu\mu}^{(\sigma_1\sigma_2)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \xi) = \int \frac{d\mathbf{q}}{2\pi} \tilde{g}(\mathbf{q}) C_{\nu}^{(\sigma_1)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}_1, \xi) C_{\mu}^{(\sigma_2)*}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}_2, \xi). \quad (3.29)$$

Рассмотрим предел высокой пространственной когерентности, когда весовая функция $\tilde{g}(\mathbf{q})$ локализована вблизи малых волновых векторов. Положим продольную координату $\xi=0$, поскольку случай малых волновых векторов далее используется только в фокальной плоскости. Компоненты положительного конуса КР удобно представить в виде: $C_{\mu}^{(+)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) = C_{\mu}^{(+)}(0, \boldsymbol{\rho}) \exp[A(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) + iB(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})]$, где A и B — амплитудная и фазовая модуляции, возникающие из-за наличия случайного поперечного волнового вектора падающего на кристалл луча. Введенные модуляции задаются выражениями:

$$A = \text{Re}(\ln[C_{\mu}^{(+)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) / C_{\mu}^{(+)}(0, \boldsymbol{\rho})]), \quad (3.30)$$

$$B = \text{Im}(\ln[C_{\mu}^{(+)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) / C_{\mu}^{(+)}(0, \boldsymbol{\rho})]). \quad (3.31)$$

Данное представление очень удобно, так как разница между точными компонентами конуса КР $C_{\mu}^{(\pm)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})$ и невозмущенным решением $C_{\mu}^{(\pm)}(0, \boldsymbol{\rho})$ крайне мала. Поэтому амплитудную и фазовую модуляции можно рассматривать как очень малые величины. Следует отметить, что обе модуляции не зависят от дополнительного

ОУМ $\hbar\mu$, поскольку в пределе хорошо различимого кольца КР ($\rho_0 \gg 1$) он становится несущественным. Это свойство позволяет перейти от компонент конуса КР непосредственно к конусу $C^{(\pm)}$, заданному формулой (3.28):

$$C^{(\pm)}(\mathbf{q}, \rho) = C^{(\pm)}(0, \rho) \exp[A(\pm\mathbf{q}, \rho) \pm iB(\pm\mathbf{q}, \rho)], \quad (3.32)$$

где для обоих конусов вводятся только две модуляции, A и B , вместо четырех функций, $A^{(\pm)}$ и $B^{(\pm)}$, так как имеется связь между отрицательными компонентами конуса КР и положительными $C_{\mu}^{(-)}(\mathbf{q}, \rho, \xi) = C_{\mu}^{(+)}(-\mathbf{q}, \rho, -\xi)^*$. Для вывода данного соотношения мы предполагали, что Фурье компонента амплитуды электрического поля $\tilde{\xi}^{(0)}(\mathbf{k})$ симметрична при замене поперечного волнового вектора \mathbf{k} на $-\mathbf{k}$.

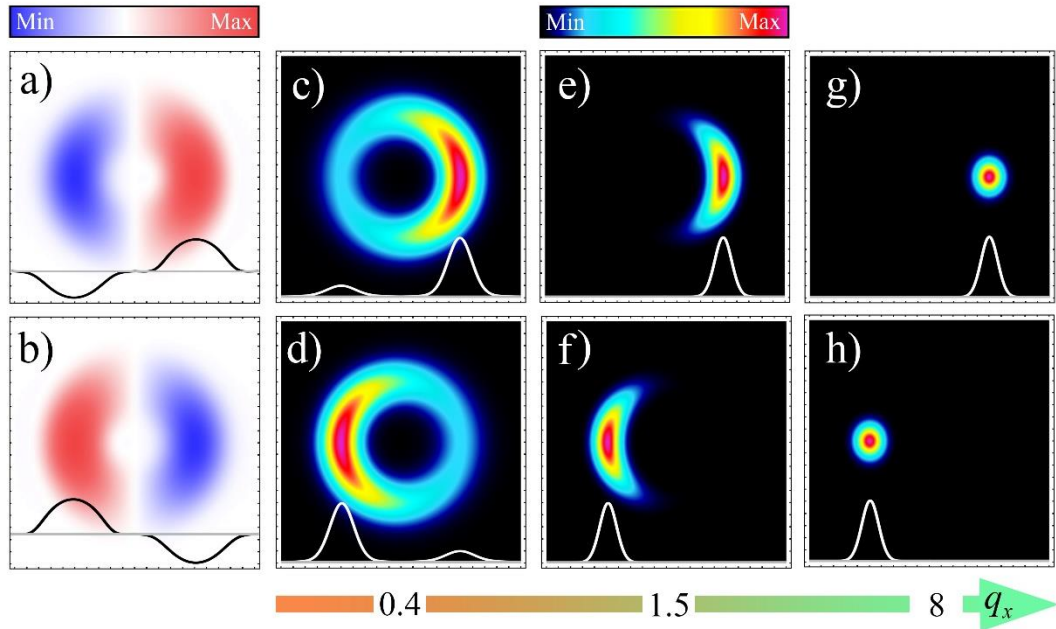


Рисунок 3.2 (a)–(b) Поперечные распределения амплитудной модуляции конусов КР в фокальной плоскости. Для численного расчета мы использовали формулу (3.30) и параметры $\rho_0=5$ и $q_x=0.4$. (c)–(h) Поперечные распределения интенсивности конусов КР в фокальной плоскости, рассчитанные по формуле (3.28) для волновых векторов $q_x=0.4$ (c)-(d), $q_x=1.5$ (e)-(f) и $q_x=8$ (g)-(h). Первая строка соответствует положительному конусу $C^{(+)}$, а вторая — отрицательному конусу $C^{(-)}$. Для ясности внизу каждого рисунка показаны соответствующие центральные поперечные сечения вдоль оси x .

В результате, только амплитудная и фазовая модуляции зависят от случайного волнового вектора в формуле (3.32). Оказывается, что амплитудная модуляция, показанная на Рис. 3.2а–b, играет главную роль в формировании новых эффектов в фокальной плоскости. Из Рис. 3.2а–b видно, что амплитудная модуляция положительного конуса $C^{(+)}$ положительна при $\rho_x > 0$ и отрицательна при $\rho_x < 0$ (Рис. 3.2а). В свою очередь, амплитудная модуляция, соответствующая отрицательному конусу $C^{(-)}$, ведет себя противоположным образом (Рис. 3.2b). Это объясняется тем, что наличие поперечного волнового вектора приводит к распространению светового луча под наклоном к оптической оси на угол, пропорциональный модулю волнового вектора. В этом случае увеличение волнового вектора трансформирует КР в двулучепреломление, что ясно показано на Рис. 3.2с–h [99–101]. Стоит обратить внимание на тот факт, что положительному конусу соответствует необыкновенный луч, а отрицательному конусу - обыкновенный.

В то же время, распределения интенсивности в виде полумесяца (Рис. 3.2e-f) и ярких пятен (Рис. 3.2g-h) уже нет смысла описывать с помощью амплитудной и фазовой модуляций (3.30)-(3.31), так как теперь случайный волновой вектор сильно изменяет форму пучка. Поэтому, необходимо вычислить компоненту конуса КР (3.28) в явном виде. Поскольку детерминированная амплитуда электрического поля $\mathcal{E}^{(0)}(\mathbf{p})$ описывается функцией Гаусса (3.18), мы воспользуемся формулой Якоби–Ангера [102] и проинтегрируем формулу (3.28) по угловой переменной, получая:

$$C_{\mu}^{(+)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi) = \frac{1}{2} e^{-\frac{q^2}{2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{\mu} e^{i(m+\mu)\varphi - im\theta_q} \int_0^{+\infty} \kappa d\kappa e^{-\frac{(1+i\xi)\kappa^2}{2} - i\rho_0\kappa} J_m(iq\kappa) J_{m+\mu}(k\rho). \quad (3.33)$$

Уравнение (35) наглядно показывает, что в пределе больших волновых векторов пучок КР можно представить в виде суперпозиции прошедших через кристалл бессель-гауссовых мод с различным ОУМ [A4]. Так, если поперечный волновой вектор мал, тогда основной вклад в сумму дает член с нулевым ОУМ, и мы получаем КР гауссова пучка. Для произвольного значения поперечного волнового вектора

становятся важны также более высокие ОУМ. В результате, с увеличением поперечного волнового вектора растет вклад высших ОУМ, что приводит к трансформации конусов КР в пучок, имеющий вид полумесяца, (Рис. 3.2e-f), а затем в яркое пятно (Рис. 3.2g-h).

Может показаться, что выражение (3.33) является окончательным, поскольку интегралы КР не могут быть вычислены в явном виде [103,104]. Однако в пределе больших волновых векторов ($|\mathbf{q}| \gg 1$) можно воспользоваться ранее предложенной бессель-гауссовой моделью КР [A1]. В соответствии с идеологией данной модели, для вычисления интегралов типа (3.33) необходимо преобразовать вклад $\exp[-i\rho_0\kappa]$ под знаком интеграла. Так, преобразуем экспоненту в функцию Бесселя комплексного аргумента, используя асимптотическое разложение функции Бесселя [105]:

$$i^\mu \exp[-i\rho_0\kappa] J_m(iq\kappa) \approx \frac{e^{\frac{i\pi}{2}(m+\mu+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2\pi iq\kappa}} \exp\left[-i(\rho_0 + iq)\kappa - \frac{m^2}{2q\kappa}\right], \quad (3.34)$$

и, поскольку функция Бесселя комплексного аргумента имеет следующий асимптотический вид:

$$J_{m+\mu}[(\rho_0 + iq)\kappa] \approx \frac{e^{\frac{i\pi}{2}(m+\mu+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2\pi(\rho_0 + iq)\kappa}} \exp\left[-i(\rho_0 + iq)\kappa - i\frac{m^2}{2(\rho_0 + iq)\kappa}\right], \quad (3.35)$$

мы можем выразить (3.34) через (3.35) как:

$$i^\mu \exp[-i\rho_0\kappa] J_m(iq\kappa) \approx \sqrt{\frac{\rho_0 + iq}{iq}} \exp\left(-\frac{m^2}{2q^2} \frac{\rho_0}{(\rho_0 + iq)}\right) J_{m+\mu}[(\rho_0 + iq)\kappa], \quad (3.36)$$

где мы воспользовались тем свойством, что основной вклад в подынтегральное выражение дают волновые векторы вблизи $\kappa=q$. В результате, подставляя (3.36) в выражение для амплитуды конуса КР (3.33), интегралы по переменной κ легко вычисляются, и мы получаем:

$$C_{\mu}^{(+)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}, \xi) = \frac{e^{i\mu\theta_q}}{2(1+i\xi)} \sqrt{\frac{-i\tau}{q}} \exp\left[-\frac{\rho^2 + (\rho_0 + q\xi)^2}{2(1+i\xi)} - iq\rho_0 - iq^2 \frac{\xi}{2}\right] \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i(m+\mu)(\varphi-\theta_q) - \frac{m^2}{2\varepsilon^2} \frac{1}{\rho_0\tau}} I_{m+\mu}\left(\frac{\rho(\rho_0 + q\xi)}{1+i\xi} + iq\rho\right), \quad (3.37)$$

где $I_m(x)$ - модифицированная функция Бесселя порядка m , $\tau = \rho_0 + iq$ - комплексный параметр распространения, введенный для описания обобщенных бessel-гауссовых лучей (действительная часть параметра распространения τ дает радиус луча в фокальной плоскости ρ_0 , а мнимая часть определяет угол наклона q относительно оси симметрии пучка), $\varepsilon = q/\rho_0$ - параметр асимметрии пучка, который задает переход от распределения интенсивности в виде полумесяца ($\varepsilon \ll 1$), показанного на Рис. 3.2e-f, к ярким пятнам ($\varepsilon \gg 1$), показанным на рис. 3.2g-h. Для суммирования выражения (3.37) по ОУМ заменим экспоненциальную функцию на функцию Бесселя комплексного аргумента:

$$\exp\left[-\frac{m^2}{2\varepsilon^2} \frac{1}{\rho_0\tau}\right] \approx \sqrt{2\pi\tau q \varepsilon} \exp[-\tau\rho_0\varepsilon^2] I_m(\tau\rho_0\varepsilon^2), \quad (3.38)$$

и используем теорему сложения Графа [102], получая результирующую формулу:

$$C_{\mu}^{(+)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}, \xi) = \frac{\sqrt{-2\pi i \varepsilon \tau^2} e^{i\mu\varphi}}{2\sigma_{\xi}} \left(\frac{\rho + \sigma_{\xi}\rho_0\varepsilon^2 e^{-i(\varphi-\theta_q)}}{\rho + \sigma_{\xi}\rho_0\varepsilon^2 e^{i(\varphi-\theta_q)}}\right)^{\frac{\mu}{2}} \times \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho_{\xi}^2}{2\sigma_{\xi}} - iq\rho_0 - i\xi \frac{q^2}{2} - \tau\rho_0\varepsilon^2\right] I_{\mu}\left(\frac{\tau}{\sigma_{\xi}} \sqrt{\rho^2 + 2\sigma_{\xi}\boldsymbol{\rho}\rho_0\varepsilon^2 + \sigma_{\xi}^2\rho_0^2\varepsilon^4}\right), \quad (3.39)$$

где $\boldsymbol{\rho}_{\xi} = \rho_{\xi} \mathbf{n}_q$ - вектор, модуль которого определяет радиус пучка при произвольном значении ξ и равен $\rho_{\xi} = \rho_0 + q\xi$, а его направление задает нормированный поперечный волновой вектор $\mathbf{n}_q = \mathbf{q}/q$; $\sigma_{\xi} = 1 + i\xi$ - функция пространственного распространения; В случае, когда параметр асимметрии очень велик ($\varepsilon \gg 1$), то уравнение (3.39) сильно упрощается и переходит в гауссов пучок:

$$C_{\mu}^{(+)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi) = \frac{e^{i\mu\theta_q}}{2\sigma_{\xi}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\xi})^2}{2\sigma_{\xi}} + i\mathbf{q}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) - i\xi \frac{q^2}{2}\right]. \quad (3.40)$$

Следует отметить, что введенные пучки (3.39) очень похожи на асимметричные бесселевы пучки [106,107] и бессель-гауссовы пучки [108,109], ранее описанные в литературе. Основное отличие состоит в том, что параметр распространения τ теперь является комплексной величиной, как и для обобщенных бессель-гауссовых пучков [71]. Следовательно, введенные в данной работе пучки следует называть обобщенными асимметричными бессель-гауссовыми (ОАБГ) пучками.

Таким образом, в данном разделе был построен аналитическая теория КР частично когерентного излучения, основанная на представлении, в котором случайное электрическое поле, падающее на кристалл, имеет детерминированную амплитуду, но флуктуирующую фазу. Используя данный подход, мы можем рассчитать распространение электрического поля через кристалл КР, как это делалось в когерентной теории, и усреднить флуктуации только на последнем этапе. Для источников модели Шелла флуктуирующая фаза выражается через случайный волновой вектор. Когда случайный волновой вектор мал, пучок КР удобно описывать в терминах амплитудной и фазовой модуляций (3.32). В промежуточном случае, когда модуль волнового вектора q много больше единицы, но много меньше нормированного радиуса кольца КР ρ_0 , распределение интенсивности трансформируется в полумесяц, описываемый ОАБГ пучком (3.39). В пределе достаточно больших волновых векторов ($q \gg \rho_0$) КР полностью переходит в двулучепреломление и выражается через обычные гауссовы пучки (3.40). Далее, мы будем использовать полученные в данном разделе решения, для расчета интенсивности КР в ближнем и дальнем поле.

3.6. Кольца конической рефракции в фокальной плоскости

В этом разделе мы рассмотрим распределение интенсивности конической рефракции частично когерентного излучения в фокальной плоскости. Для этого об-

судим эксперимент, опубликованный в работе [A9]. Так, главная цель проведённого эксперимента заключалась в исследовании пучка конической рефракции света с частичной пространственной когерентностью.

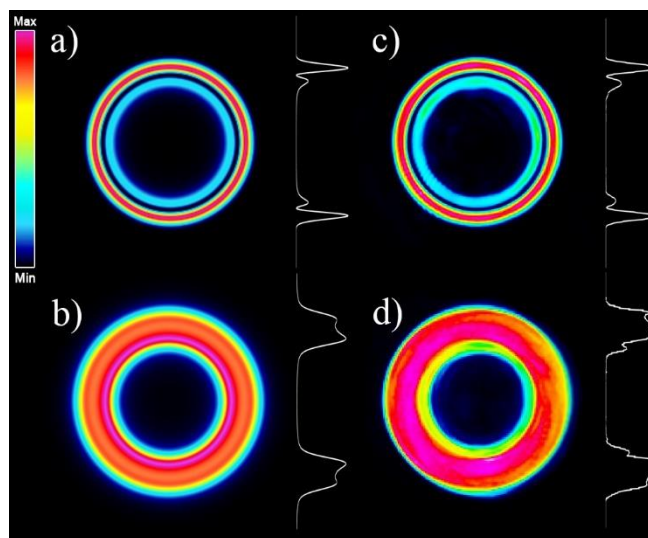


Рисунок 3.3 Распределение интенсивности пучка конической рефракции в фокальной плоскости (распределение Ллойда). (a-b) Численный расчет при помощи двух-конусной модели конической рефракции, и (c-d) экспериментальные результаты. Расчет проводился для степени когерентности $\alpha_{CR}=1$ и гауссова пучка (a) и для равномерного кругового распределения интенсивности (flat-top или top hat) и $\alpha_{CR}=0$ (b). Аналогично, эксперимент проводился для лазерного луча в отсутствие вращающейся пластинки, сбивающей когерентность, (c), и вместе с ней (d).

В качестве источника излучения использовался гелий-неоновый лазер ($\lambda \approx 632$ нм). Так как свет лазера изначально обладает высокой пространственной когерентностью, в фокальной плоскости наблюдалось типичное двух-кольцевое распределение интенсивности с четко выраженным темным кольцом Поггендорффа (Рис. 3.3(c)). На втором этапе эксперимента, чтобы уменьшить степень пространственной когерентности лазерного луча, была использована вращающаяся матовая пластинка. В результате, наблюдалось полное исчезновение темного кольца Поггендорффа в фокальной плоскости для низко-когерентного излучения, как показано на Рис. 3.3(d).

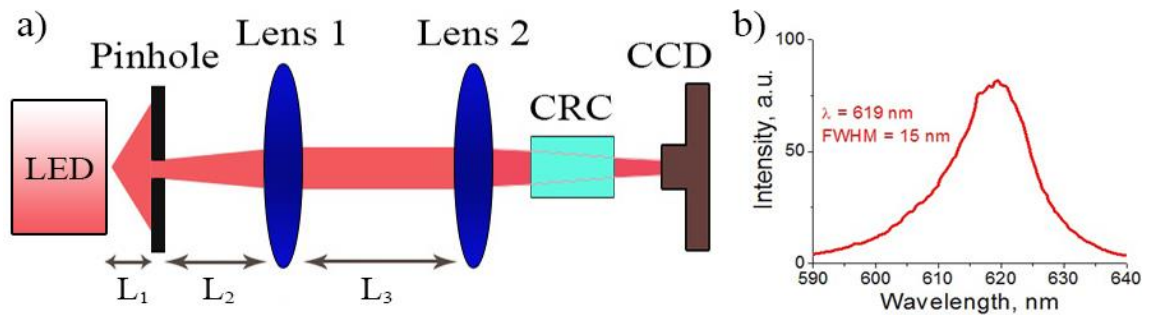


Рисунок 3.4 (а) Схема экспериментальной установки, используемой для получения конической рефракции частично когерентного излучения. Свет точечного светодиода коллимировался линзой 1 (с различным фокусным расстоянием) и затем фокусировался линзой 2 (фокусное расстояние 100 мм) через двуосный кристалл. ПЗС-матрица, позволяющая проводить измерение пространственной эволюции пучка конической рефракции, устанавливалась на подвижку.

(б) Спектр излучения светодиода.

На следующем этапе было исследовано влияние частичной пространственной когерентности на постепенное исчезновение темного кольца Поггендорфа. Для этого был поставлен эксперимент, схема которого показана на Рис. 3.4(б). В качестве источника излучения использовался мощный красный светодиод с центральной длиной волны $\lambda \approx 619 \text{ nm}$. Спектр излучения светодиода показан на Рис. 3.4(б). Из рисунка можно оценить полуширину спектра, которая составляет приблизительно 15 нм. Длина временной когерентности при этом равна $\sim 26 \text{ мкм}$. Однако, в параксиальном приближении, минимальная требуемая длина временной когерентности составляет всего $\sim 1 \text{ мкм}$ и наблюдение интерференционных эффектов в описываемых экспериментах оказывается возможным. Поэтому основную роль в проделанных экспериментах играла пространственная когерентность излучения светодиода, которой управляли за счет уменьшения или увеличения расстояния от источника света до точечного отверстия. Диаметр точечного отверстия составлял 100 мкм. Дифракционная расходимость света после отверстия компенсировалась коллимирующей линзой с переменным фокусным расстоянием. Затем, коллимированный свет фокусировался Линзой 2 с фокусным расстоянием 100 мм в двуосный кристалл с длиной 18 мм, вырезанный вдоль оптической оси. Подобная методика

использовалась в первых экспериментах по конической рефракции, выполненных задолго до появления лазеров. Выходная картина конической рефракции регистрировалась ПЗС-матрицей, установленной на прецизионной механической подвижке с диапазоном перемещения 150 мм.

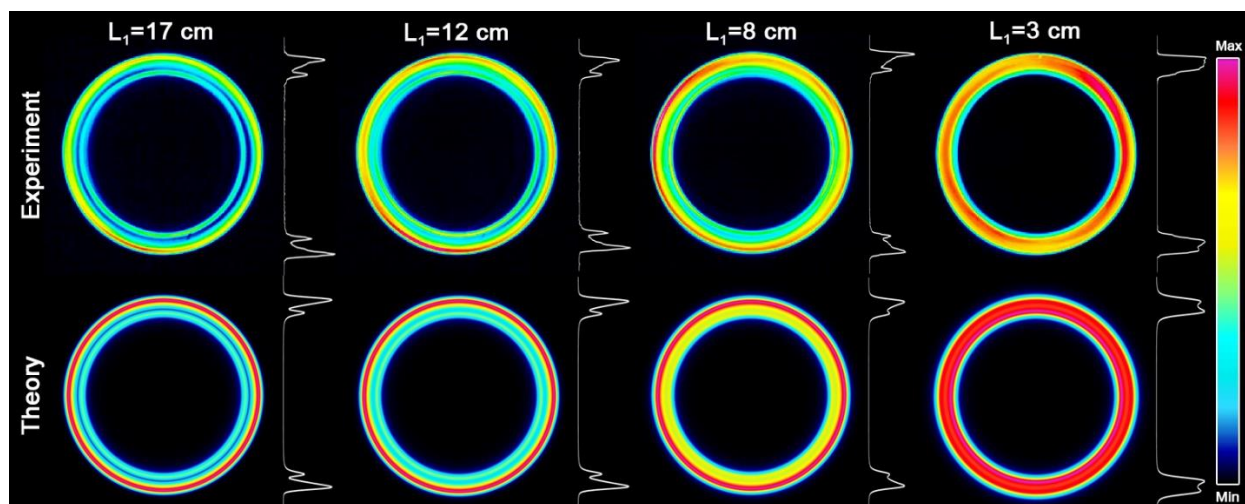


Рисунок 3.5 (а) Поперечные распределения интенсивности пучка конической рефракции в фокальной плоскости (плоскость Ллойда), полученные экспериментально (первый ряд) и из численного моделирования (второй ряд) для диаметра отверстия 100 мкм и расстояния от светодиода до точечного отверстия $L_1 \sim 17$ см ($\alpha_{CR}=0.85$ и первый столбец), 12 см ($\alpha_{CR}=0.74$ и второй столбец), 8 см ($\alpha_{CR}=0.54$ и третий столбец) и 3 см ($\alpha_{CR}=0.07$ и четвертый столбец), соответственно. Профиль сечения интенсивности пучка вдоль вертикальной оси показан справа от каждого рисунка.

Излучение от светодиода изначально было полностью некогерентным. Однако, хорошо известно, что в процессе пространственной эволюции пучка характерный пространственный масштаб когерентности растет [26]. Таким образом, при фиксированном диаметре точечного отверстия, можно было уменьшать когерентность пучка сокращая расстояние от светодиода до точечного отверстия (Длина L_1 на Рис. 3.3(а)).

Когда точечное отверстие находится на достаточно большом расстоянии от светодиода ($L_1=17$ см), излучение, падающее на кристалл конической рефракции, обладает высокой степенью пространственной когерентности. В результате, можно наблюдать классическую картину конической рефракции в фокальной плоскости с

четко очерченным темным кольцом Поггендорфа, как показано в первом столбце на Рис. 3.5. При постепенном уменьшении расстояния L_1 , темное кольцо становится все менее и менее выраженным (третий и четвертый столбцы на Рис. 3.5), что связано с переходом от высокой пространственной когерентности к низкой. В результате, темное кольцо полностью исчезает при $L_1 = 3$ см, так как степень пространственной когерентности излучения стремится к нулю (четвертый столбец на Рис. 3.5). Проведенный эксперимент по получению конической рефракции излучения светодиода полностью согласуется с предыдущими результатами, где в качестве источника излучения использовался лазерный луч, прошедший через мутную вращающуюся пластинку.

3.7. Феноменологическая модель конической рефракции частично когерентного излучения

Для теоретического описания конической рефракции частично когерентного излучения в работе [A9] была построена феноменологическая модель данного явления. В качестве отправной точки была рассмотрена двух-конусную модель конической рефракции [24,92], которая подробно обсуждалась в предыдущих разделах. Согласно двух-конусной модели, электрическое поле пучка конической рефракции можно выразить в виде суммы двух компонент $\mathbf{E} = \mathbf{C}^{(+)} + \mathbf{C}^{(-)}$, где $\mathbf{C}^{(\pm)}$ принято называть конусами конической рефракции. В свою очередь, интенсивность света — есть сумма интенсивностей каждого из конусов по отдельности и интерференционного вклада двух конусов. В соответствии с феноменологической теорией [A9] частичная пространственная когерентность света приводит к следующему изменению интенсивности в фокальной плоскости:

$$I(\rho) = |\mathbf{C}^{(+)}(\rho)|^2 + |\mathbf{C}^{(-)}(\rho)|^2 + 2|\mathbf{C}^{(+)}(\rho)||\mathbf{C}^{(-)}(\rho)|\alpha_{CR} \cos[\arg(\mathbf{C}^{(-)}(\rho)^* \mathbf{C}^{(+)}(\rho))], \quad (3.41)$$

где α_{CR} — феноменологическая степень когерентности конусов конической рефракции. При степени когерентности $\alpha_{CR} = 1$ излучение полностью когерентно, и конусы конической рефракции интерферируют друг с другом, создавая двойное коль-

цевое распределение интенсивности в фокальной плоскости. В случае низко-когерентного излучения (степень когерентности $\alpha_{CR}=0$) интерференционный член в уравнении (3.41) обращается в нуль, и мы наблюдаем полное исчезновение темного кольца Поггендорфа в фокальной плоскости. Если излучение частично когерентное, то степень когерентности α_{CR} принимает значения от нуля до единицы. При этом связь между феноменологической степенью когерентности конусов конической рефракции и входной пространственной степенью когерентности имеет следующий простой вид: $\alpha_{CR}=g(\rho_C)$, где ρ_C – характерное расстояние, зависящее от распределения интенсивности входное излучение [A9]. Для описания экспериментальных данных, показанных на Рис. 3.5, при помощи формулы (3.41) мы использовали следующее выражение для степени когерентности конусов конической рефракции:

$$\alpha_{CR} = \left| \frac{2J_1(x)}{x} \right|; \quad x = kD \frac{r_s}{L_1} \quad (3.42)$$

Которое следует из теоремы Ван Циттерта-Цернике для частично когерентного света от абсолютно некогерентного источника радиуса r_s . При этом k – волновой вектор света в вакууме, D — диаметр точечного отверстия, а L_1 — расстояние между источником и точечным отверстием (Рис. 3.4). В качестве входного пучка мы за место обычного гауссова пучка использовали уплощенные гауссовы пучки [110]. Их комплексная амплитуда в прямом и обратном пространстве имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho) &= \exp \left[-\frac{(N+1)\rho^2}{2} \right] \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} \left[\frac{(N+1)\rho^2}{2} \right]^m, \\ \tilde{\mathcal{E}}(\kappa) &= \frac{1}{(N+1)} \sum_{n=0}^N {}_1F_1 \left(n+1; 1; -\frac{\kappa^2}{(N+1)} \right), \end{aligned} \quad (3.43)$$

где N – параметр пучка, характеризующий уплощение вблизи максимума интенсивности (Рис. 3.6), а ${}_1F_1$ - вырожденная гипергеометрическая функция. Так, при $N=0$, уплощенный гауссов пучок переходит в обычный гауссов пучок, а при $N \rightarrow \infty$,

уплощенный гауссов пучок переходит в равномерное круговое распределение интенсивности (flat-top или top hat). На Рис. 3.6 проиллюстрировано распределение интенсивности для гауссова пучка (Рис. 3.6 (а)), уплощенного гауссова пучка с $N=3$ (Рис. 3.6 (б)), и цилиндрического пучка (Рис. 3.6 (в)), построенные по формулам (3.43).

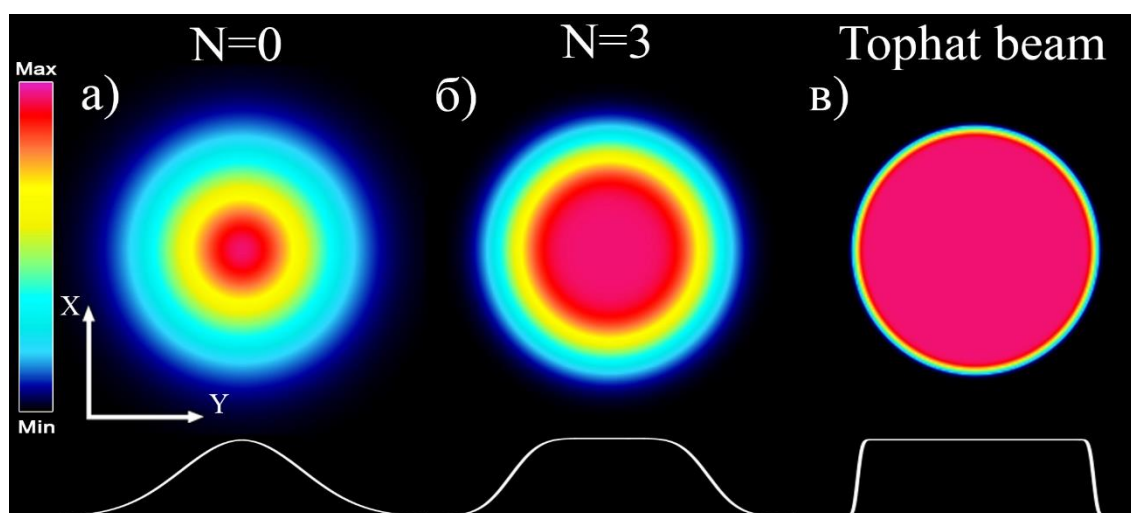


Рисунок 3.6 (а) Поперечное распределение интенсивности в фокальной плоскости для гауссова пучка (а), уплощенного гауссова пучка с $N=3$ (б), top hat пучка (в), и соответствующие сечения под ними.

В результате, мы численно рассчитали поперечное распределение интенсивности конической рефракции частично когерентного уплощенного гауссова пучка, которое показано на Рис. 3.3 (а-б). Так, на Рис. 3.3 (а) можно увидеть четкое темное кольцо Поггендорфа, когда излучения является полностью когерентным. В свою очередь, когда излучения становилось низкокогерентным, темное кольцо исчезало, как показано на Рис. 3.3 (б). Численное моделирование конической рефракции частично когерентного излучения показано на Рис. 3.5. Видно, что результаты численного расчета хорошо согласуются с экспериментом.

3.8. Строгий расчет степени когерентности конусов конической рефракции

Теперь покажем, что феноменологическая модель частично когерентной конической рефракции может быть строго обоснована для случая высокой пространственной когерентности, когда параметр когерентности $\Delta \ll 1$. Также, мы строго

докажем соотношение $\alpha_{CR}=g(\rho_C)$ и найдем явный вид характеристического расстояния ρ_C , как функцию от распределения интенсивности падающего на кристалл излучения. Будет получено физическое объяснение исчезновения темного кольца Поггендорфа при уменьшении пространственной когерентности пучка. Также, мы покажем, что в режиме низкой когерентности ($\Delta \gg 1$), степень когерентности конусов конической рефракции уменьшается в соответствии со степенным законом, который, вплоть до постоянного, не зависит от детальной формы входной пространственной степени когерентности. Кроме того, мы предскажем контринтуитивный эффект сужения ширины кольца конической рефракции, при снижении когерентности света.

Во-первых, введем строгое определение степени когерентности конусов конической рефракции, используя единую теорию оптической когерентности. Это можно сделать, если интенсивность излучения выразить аналогично уравнению (3.41) в виде:

$$I(\rho) = I^{(+)}(\rho) + I^{(-)}(\rho) + 2I^{(+)}(\rho)^{1/2} I^{(-)}(\rho)^{1/2} |\gamma(\rho, \rho)| \cos[\arg \gamma(\rho, \rho)], \quad (3.44)$$

где $I^{(\pm)}(\rho) = \langle |C^{(\pm)}(\rho)|^2 \rangle$ – средняя интенсивность каждого из конусов; и $\gamma(\rho_1, \rho_2) = \langle C^{(-)}(\rho_1) C^{(+)}(\rho_2) \rangle / I^{(+)}(\rho_1)^{1/2} I^{(-)}(\rho_2)^{1/2}$ – нормированная кросс-конусная корреляционная функция, введенная по аналогии с классической задачей интерференции света, проходящего через экран с двумя параллельными щелями [26]. Из сравнения формул (3.44) и (3.41) очевидно, что модуль нормированной кросс-конусной корреляционной функции играет роль степени конусов конической рефракции:

$$\alpha_{CR} = |\gamma(\rho, \rho)| = |\langle C^{(-)}(\rho) C^{(+)}(\rho) \rangle| / I^{(+)}(\rho)^{1/2} I^{(-)}(\rho)^{1/2}. \quad (3.45)$$

Как правило, степень когерентности конусов CR, α_{CR} , зависит от поперечного радиус-вектора ρ . Однако мы рассмотрим область вблизи максимума интенсивности кольца конической рефракции и, следовательно, $\rho \approx \rho_0$. Из формула (3.45) следует, что для вычисления степени когерентности α_{CR} , необходимо сначала рассчитать ин-

тенсивность каждого конуса конической рефракции и кросс-конусную корреляционную функцию. Мы вычислим их с помощью представления флуктуирующей фазы (3.29). Далее будет рассмотрено два характерных случая: высокой пространственной когерентности ($\Delta \ll 1$) и низкой пространственной когерентности ($\Delta \gg 1$).

Начнем с рассмотрения конической рефракции излучения с высокой пространственной когерентностью ($\Delta \ll 1$). В этом предельном случае для расчета корреляционных функций используем формулу (3.32), согласно которой слабые фазовые флуктуации исходного излучения создают амплитудные и фазовые флуктуации электрического поля конусов конической рефракции. Найдем в явном виде зависимость формы флуктуаций излучения конической рефракции от флуктуаций исходного поля. Для этого разложим выражения для амплитудной (3.30) и фазовой (3.31) флуктуаций по малому случайному волновому вектору в ряд Тейлора до второго порядка. Затем, подставим полученные разложения в выражения для электрического поля конусов конической рефракции (3.32). В результате, скалярное произведение векторов электрического поля одинаковых и противоположных конусов будет иметь вид:

$$|\mathbf{C}^{(\pm)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})|^2 = |\mathbf{C}^{(\pm)}(0, \boldsymbol{\rho})|^2 \exp \left[\pm 2 \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} q_i + \sum_{ij} \frac{\partial^2 A}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j \right], \quad (3.46)$$

$$\mathbf{C}^{(-)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})^* \mathbf{C}^{(+)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{C}^{(-)}(0, \boldsymbol{\rho})^* \mathbf{C}^{(+)}(0, \boldsymbol{\rho}) \exp \left[\sum_{ij} \left(i \frac{\partial^2 B}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 A}{\partial q_i \partial q_j} \right) q_i q_j \right]. \quad (3.47)$$

Интенсивность конусов и кросс-конусную корреляционную функцию можно получить из (3.46) и (3.47) путем усреднения по случайному волновому вектору:

$$I^{(\pm)}(\boldsymbol{\rho}) = \left\langle |\mathbf{C}^{(\pm)}(\boldsymbol{\rho})|^2 \right\rangle = \int \frac{d\mathbf{q}}{2\pi} \tilde{g}(\mathbf{q}) |\mathbf{C}^{(\pm)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})|^2, \quad (3.48)$$

$$\left\langle \mathbf{C}^{(-)}(\boldsymbol{\rho})^* \mathbf{C}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}) \right\rangle = \int \frac{d\mathbf{q}}{2\pi} \tilde{g}(\mathbf{q}) \mathbf{C}^{(-)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})^* \mathbf{C}^{(+)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}). \quad (3.49)$$

Воспользуемся хорошо известным свойством усреднения экспоненциальных функций:

$$\left\langle \exp \left(\sum_i 2\alpha_i q_i + \sum_{ij} \beta_{ij} q_i q_j \right) \right\rangle = \exp \left(\sum_i (\alpha_i^2 + \beta_{ii} / 2) \langle \mathbf{q}^2 \rangle \right), \quad (3.50)$$

которое действительно в пределе малых случайных волновых векторов, а также когда среднее значение $\langle q_i \rangle = 0$ и дисперсия $\langle q_i q_j \rangle = \langle \mathbf{q}^2 \rangle \delta_{ij} / 2$, где δ_{ij} - символ Кронекера. Эти условия выполняются, если весовая функция $\tilde{g}(\mathbf{q})$ не зависит от угловой переменной θ_q . В результате мы получаем следующее выражение:

$$I^{(\pm)}(\boldsymbol{\rho}) = |\mathbf{C}^{(\pm)}(0, \boldsymbol{\rho})|^2 \exp \left([2(\nabla A)^2 + \Delta A] \langle \mathbf{q}^2 \rangle / 2 \right), \quad (3.51)$$

$$\langle \mathbf{C}^{(-)}(\boldsymbol{\rho})^* \mathbf{C}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}) \rangle = \mathbf{C}^{(-)}(0, \boldsymbol{\rho})^* \mathbf{C}^{(+)}(0, \boldsymbol{\rho}) \exp \left([i\Delta B + \Delta A] \langle \mathbf{q}^2 \rangle / 2 \right), \quad (3.52)$$

где ∇ и Δ - операторы Набла и Лапласа, действующие на переменную \mathbf{q} , соответственно. Из (3.51) следует, что интенсивность конусов будет содержать только вклады от амплитудной флуктуации A . Более того, вклад, пропорциональный ΔA , входит в оба выражения (3.51) и (3.52), в то время как фазовая флуктуация входит только в кросс-конусную корреляционную функцию (3.52).

Введем характерное расстояние $\rho_c = 2\nabla A$, которое выражается через амплитудную флуктуацию (3.30). Также, используем соотношение между средним значением квадрата волнового вектора, производной от входной степени когерентности $\langle \mathbf{q}^2 \rangle = -2\partial^2 g(\rho) / \partial \rho^2$, и приближение малых флуктуаций, в рамках которого справедливо:

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} \rho_c^2 \right] \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} \rho_c^2 = 1 / g(\rho_c). \quad (3.53)$$

В результате, интенсивность конусов конической рефракции и модуль кросс-конусной корреляционной функции в режиме высокой пространственной когерентности ($\Delta \ll 1$) будут иметь следующий вид:

$$I^{(\pm)}(\boldsymbol{\rho}) \propto |C^{(\pm)}(0, \boldsymbol{\rho})|^2 / g(\boldsymbol{\rho}_C), \quad (3.54)$$

$$\left| \langle C^{(-)}(\boldsymbol{\rho})^* C^{(+)}(\boldsymbol{\rho}) \rangle \right| \propto |C^{(-)}(0, \boldsymbol{\rho})| |C^{(+)}(0, \boldsymbol{\rho})|, \quad (3.55)$$

где $C^{(\pm)}(0, \boldsymbol{\rho})$ – конус конической рефракции когерентного излучения, а $\boldsymbol{\rho}_C = 2\nabla A$ – характерное расстояние, которое выражается через амплитудную флуктуацию (3.30). Для вычисления расстояния $\boldsymbol{\rho}_C$, необходимо найти явный вид компонент электрического поля конусов конической рефракции, определяемых формулой (3.28). В фокальной плоскости компоненты электрического поля будут иметь вид:

$$C_{\mu}^{(+)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2} \int \frac{d\boldsymbol{\kappa}}{2\pi} \exp(i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho} - i\kappa\rho_0 + i\mu\theta_{\kappa}) \tilde{\mathcal{E}}^{(0)}(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q}). \quad (3.56)$$

Данное выражение значительно упрощается, если мы рассмотрим предел четко выраженного кольца конической рефракции $\rho_0 \gg 1$, а также будем считать радиальную координату равной радиусу кольца $\rho = \rho_0$. Используя метод стационарной фазы, проинтегрируем выражение (3.56) по угловой переменной, получая:

$$C_{\mu}^{(+)}(\mathbf{q}, \rho_0, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_0}} e^{i\mu\varphi - i\frac{\pi}{4}} \int_0^{+\infty} d\kappa \kappa^{1/2} \tilde{\mathcal{E}}^{(0)}(\sqrt{\kappa^2 - 2\kappa\mathbf{q}\mathbf{e}_r + q^2}), \quad (3.57)$$

где мы использовали независимость преобразования Фурье $\tilde{\mathcal{E}}^{(0)}(\kappa)$ от угловой переменной, что соответствует радиально-симметричной амплитуде поля $\mathcal{E}^{(0)}(\rho)$. Следовательно, поскольку модуль случайного волнового вектора можно считать малым ($q \ll \kappa$) в пределе высокой пространственной когерентности, используем разложение подынтегрального выражения (3.57) в ряд Тейлора:

$$C_{\mu}^{(+)}(\mathbf{q}, \rho_0, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_0}} e^{i\mu\varphi - i\frac{\pi}{4}} \int_0^{+\infty} d\kappa \left(\kappa^{1/2} + \kappa^{-1/2} \frac{\mathbf{q}\mathbf{e}_r}{2} \right) \tilde{\mathcal{E}}^{(0)}(\kappa), \quad (3.58)$$

Зная выражение для компоненты электрического поля конуса конической рефракции (3.58), найдем амплитудную флуктуацию A используя формулу (3.30). После

этого получаем выражение для характерного расстояния $\rho_C = 2\sqrt{A}$, от которого зависит степень входной когерентности в выражении (3.54):

$$\rho_C = \mathbf{e}_r \int_0^{+\infty} d\kappa \kappa^{-1/2} \tilde{\mathcal{E}}^{(0)}(\kappa) / \int_0^{+\infty} d\kappa \kappa^{1/2} \tilde{\mathcal{E}}^{(0)}(\kappa), \quad (3.59)$$

где $\mathbf{e}_r = [\cos(\varphi), \sin(\varphi)]$ - радиальный единичный вектор в полярной системе координат.

В результате, используя выражения (3.45)–(3.59), можно связать степень когерентности конусов конической рефракции α_{CR} и входную пространственную степень когерентности $g(\rho)$ следующим простым и элегантным образом:

$$\alpha_{CR} = g(\rho_C), \quad (3.60)$$

что доказывает соотношения между входной и выходной степенью когерентности, феноменологически полученные в работе [A9]. Из уравнения (3.60) следует, что уменьшение когерентности входного пучка приводит к исчезновению интерференции между конусами конической рефракции, показанной на Рис 3.7(а). На первый взгляд кажется, что поведение степени когерентности конусов можно объяснить за счет уменьшения числителя в уравнении (3.45) с фиксированным знаменателем. Такое утверждение типично для теории оптической когерентности и связано с фазовыми флуктуациями, которые наблюдаются в кросскорреляционной функции, но исчезают в интенсивности пучка. Однако анализ уравнений (3.55)–(3.54) приводит к противоположному выводу. В рассматриваемой задаче кросскорреляционная функция (3.55) не изменяется, а интенсивность увеличивается, так как становится обратно пропорциональна входной пространственной степени когерентности. Такое нетипичное поведение обусловлено критической ролью амплитудных, а не фазовых флуктуаций.

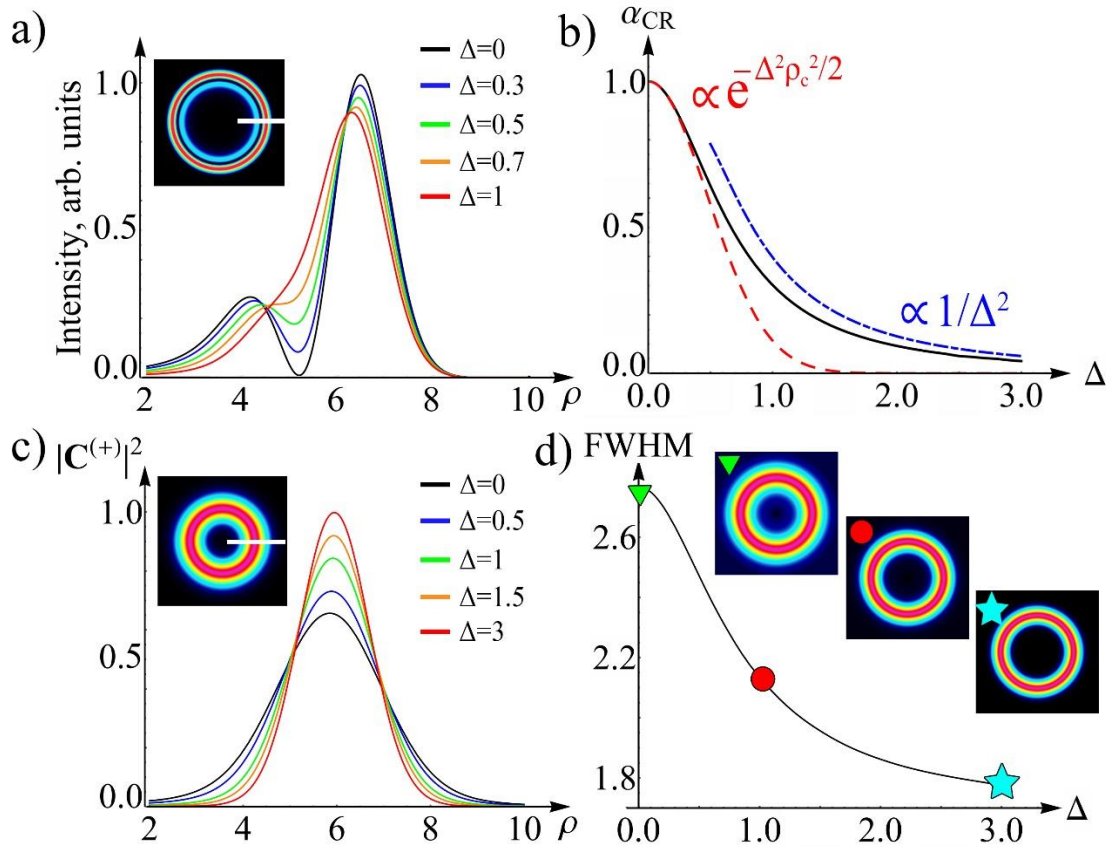


Рисунок 3.7 (а) Наглядный переход от высокой ($\Delta \ll 1$) к низкой ($\Delta \gg 1$) пространственной когерентности на примере профиля интенсивности пучка конической рефракции в фокальной плоскости. (b) Зависимость степени когерентности α_{CR} конусов конической рефракции от параметра когерентности Δ . Расчет проводился с использованием интегралов двух-конусной модели (3.45) (черная кривая), приближения высокой когерентности (3.60) (красная кривая) и низкой когерентности (3.70) (синяя кривая). (c) Профиль интенсивности света для положительного конуса конической рефракции в плоскости Ллойда для различных параметров когерентности Δ . (d) Полная ширина на уровне половины высоты (FWHM) конуса конической рефракции в зависимости от параметра когерентности Δ . Соответствующие поперечные распределения интенсивности показаны сверху (а), (c), (d). Нормированный радиус кольца конической рефракции равен $\rho_0=6$.

Амплитудные флуктуации положительного и отрицательного конусов конической рефракции наглядно показаны на Рис. 3.2 (а-б). Видно, что в каждой точке пространства положительный и отрицательный конусы имеют противоположные знаки амплитудной флуктуации. Таким образом, амплитудные флуктуации ком-

пенсируют друг друга, когда мы рассматриваем произведение двух различных конусов определяющее кросскорреляционную функцию (3.55). Следовательно, кросскорреляционная функция (3.55) не будет зависеть от когерентности входного излучения. Однако, при произведении двух одинаковых конусов, амплитудные флуктуации удваиваются. Следовательно, интенсивность (3.54) приобретает сильную зависимость от когерентности входного света. Таким образом, амплитудные флуктуации поля конической рефракции являются физической причиной появления степени когерентности, α_{CR} . Сравнение степени когерентности конусов конической рефракции, полученной из уравнения (3.60), и численного моделирования показано на Рис. 3.7(b), где наблюдается хорошее согласие между аналитическими и численными результатами.

Теперь рассмотрим случай **низкой пространственной когерентности**. Ранее, когда свет был высококогерентным, мы использовали для вычисления корреляционных функций по формуле (3.29) выражение для конусов конической рефракции (3.32), предполагая малость флуктуаций электрического поля. Однако, когда когерентность света низкая, флуктуации больше нельзя считать малыми. В этом случае, электрическое поле отдельного конуса конической рефракции нужно описывать при помощи ОАБГ пучков (3.39). Усредняя ОАБГ пучки по случайному волновому вектору согласно формуле (3.29) мы можем получить интенсивность конусов конической рефракции и кросс-конусную корреляционную функцию, а затем рассчитать степень когерентности конусов конической рефракции по формуле (3.45). Оказывается, для вычисления интенсивности конусов можно за место ОАБГ пучков (3.39) использовать более простые гауссовы пучки (3.40), получая следующее простое выражение:

$$I^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta_q \exp[-(\mathbf{p} - \rho_0 \mathbf{n}_q)^2] = \frac{1}{2} \exp[-\rho^2 - \rho_0^2] I_0(2\rho\rho_0), \quad (3.61)$$

где интенсивность конуса явно не зависит от входной пространственной степени когерентности. Когда радиус кольца много больше его полуширины ($\rho_0 \gg 1$),

можно заменить модифицированную функцию Бесселя в формуле (3.61) на ее асимптотику. В результате, интенсивность кольца конической рефракции будет описываться функцией Гаусса $I^{(\pm)}(\rho) \propto \exp[-(\rho - \rho_0)^2]$. Данный факт можно понять напрямую из формулы (3.61). Так, результирующая интенсивность пучка формируется из некогерентной суперпозиции гауссовых пучков, центры которых расположены на кольце радиуса ρ_0 . Усредняя по расположению центров пучка, мы получаем кольцевое распределение интенсивности с радиальным профилем, описываемым функцией Гаусса. Однако удивительно, что полуширина кольца для некогерентного излучения, определяемая выражением (3.61), будет меньше, чем для полностью когерентной конической рефракции, как показано на Рис. 3.7(d). Данный необычный эффект можно легко объяснить, если внимательно рассмотреть случай когерентной конической рефракции. Ранее, нами было показано, что угловой спектр когерентного кольца конической рефракции локализован сильнее, чем спектр исходного гауссова пучка [A1]. В результате, полная ширина на уровне половины высоты (FWHM) кольца конической рефракции будет больше, чем FWHM входного гауссова пучка. Однако, когда излучения низкокогерентное, FWHM кольца конической рефракции совпадает с FWHM исходного пучка, согласно формуле (3.61). Таким образом, уменьшение пространственной когерентности света приводит к эффективному уменьшению FWHM кольца, как показано на Рис. 3.7(d).

Теперь вычислим степень когерентности конусов конической рефракции, α_{CR} , для низкокогерентного излучения, используя ранее полученную формулу (3.45). Для этого необходимо рассчитать кросс-конусную корреляционную функцию (3.49) и интенсивность конусов конической рефракции (3.48). Ранее мы уже рассчитали интенсивность конусов конической рефракции в низко-когерентном пределе (3.61), а теперь займемся вычислением кросс-конусной корреляционной функции (3.49). Для этого мы воспользуемся явной зависимостью компонент конусов конической рефракции от случайного волнового вектора (3.39). Так как рассматривается фокальная плоскость, воспользуемся свойством $\rho \approx \rho_0 \gg 1$, что позво-

лит нам заменить модифицированную функцию Бесселя ее асимптотикой при больших значениях аргумента функции. В результате, в выражение для кросс-конусной корреляционной функции (3.49) войдет следующее произведение конусов конической рефракции:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(+)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho})^* \mathbf{C}^{(-)}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) &= \frac{-i\varepsilon\tau}{2\sqrt{|\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_0\varepsilon^2| |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0\varepsilon^2|}} \times \\ &\times \exp\left[-\rho^2 - \rho_0^2 - 2iq\rho_0 - 2\tau\rho_0\varepsilon^2 + \tau|\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_0\varepsilon^2| + \tau|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0\varepsilon^2|\right], \end{aligned} \quad (3.62)$$

где мы предположили, что излучения – не поляризовано. Функция (3.62) имеет максимальное значение в области, где случайный волновой вектор $q \approx 1-2$, и параметр асимметрии $\varepsilon = q/\rho_0 \ll 1$. В результате, мы можем значительно упростить выражение (3.62):

$$\mathbf{C}^{(+)}(\mathbf{q}, \rho_0, \varphi)^* \mathbf{C}^{(-)}(\mathbf{q}, \rho_0, \varphi) = -i \frac{q}{2\rho_0} \exp\left[-2q^2\right]. \quad (3.63)$$

Кроме того, поскольку интенсивность конусов (45) при $\rho = \rho_0$ будет равна:

$$I^{(\pm)}(\rho_0, \varphi) = \frac{1}{2} \exp\left[-2\rho_0^2\right] I_0(2\rho_0^2) \approx 1/4\rho_0\sqrt{\pi}, \quad (3.64)$$

и степень когерентности (3.45) преобразуется к виду:

$$\alpha_{CR} = 2\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} dq \tilde{g}(q) q^2 \exp\left[-2q^2\right]. \quad (3.65)$$

Чтобы выразить степень когерентности конусов конической рефракции в терминах входной степени когерентности $g(\rho)$, мы воспользуемся преобразованием Ханкеля:

$$\tilde{g}(q) = \int_0^{\infty} d\rho \rho J_0(q\rho) g(\rho). \quad (3.66)$$

В результате, степень когерентности конусов конической рефракции зависит от входной пространственной степени когерентности в соответствии со следующим законом:

$$\alpha_{CR} = \int_0^{+\infty} d\rho \rho g(\rho) f(\rho), \quad (3.67)$$

где $f(\rho) = \pi \exp[-\rho^2/16] M_{1,0}(\rho^2/8)/2$, а $M_{k,\mu}(x)$ - функция Уиттекера. В пределе низкой пространственной когерентности ($\Delta \gg 1$) входная пространственная степень когерентности $g(\rho)$ локализована на гораздо меньших масштабах порядка $1/\Delta$, чем функция $f(\rho)$. Следовательно, в выражении под знаком интеграла функцию $f(\rho)$ можно заменить на $f(0) = \pi/4\sqrt{2}$. В результате степень когерентности конусов конической рефракции преобразуется к виду:

$$\alpha_{CR} \approx \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} d\rho \rho g(\rho) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \tilde{g}(0). \quad (3.68)$$

Получим в явном виде зависимость степени когерентности, α_{CR} , от параметра когерентности Δ из формулы (3.68). Как уже упоминалось, степень пространственной когерентности исходного пучка, $g(\rho)$, локализована на масштабах $1/\Delta$; следовательно, в выражении (3.68) можно сделать замену переменных $u = \Delta\rho$. В свою очередь, интеграл $\int du u g[u/\Delta]$ больше не зависит от параметра когерентности Δ .

В результате, степень когерентности конусов конической рефракции уменьшается обратно пропорционально квадрату параметра когерентности:

$$\alpha_{CR} \propto 1/\Delta^2 \propto (w_g/w_0)^2 \quad (3.69)$$

В случае гауссовского источника модели Шелла, степень когерентности α_{CR} легко вычислить, используя формулу (3.68):

$$\alpha_{CR} = \frac{\pi\sqrt{2}}{(4 + 1/\Delta^2)^{3/2}} \frac{1}{\Delta^2}, \quad (3.70)$$

что подтверждает степенное поведение степени когерентности в пределе низкой пространственной когерентности ($\Delta \gg 1$). Физически, данный эффект может быть объяснен следующим образом: как уже упоминалось ранее, интенсивность конуса (3.61) в пределе низкой когерентности не зависит от параметра когерентности Δ . Таким образом, основной вклад в степень когерентности (3.45) вносит кросс-конусная корреляционная функция, получаемая при усреднении по случайным волновым векторам (3.29). В случае низкой пространственной когерентности, наибольший вклад вносят случайные волновые векторы в круговой полоске, радиуса порядка $q \approx 1-2$. Площадь этой области в \mathbf{q} -пространстве равна $S_0 \propto 1$. Однако весовая функция $\tilde{g}(\mathbf{q})$ не равна нулю в области $S_{\text{All}} \propto \Delta^2$. Таким образом, чем меньше степень когерентности и чем больше параметр когерентности Δ , тем меньше отношение волновых векторов, которые вносят вклад в степень когерентности $\alpha_{CR} \propto S_0/S_{\text{All}} \propto 1/\Delta^2 \propto (R_C/w_0)^2$. На Рис. 3.7 показана полученная степенная зависимость в сравнении с численным расчетом степени когерентности α_{CR} для гауссовского источника модели Шелла. На рисунке также можно наблюдать, как происходит переход от высокой пространственной когерентности (3.60) к низкой пространственной когерентности (3.70).

В результате, данный раздел посвящен поведению степени когерентности конусов конической рефракции в пределе высокой и низкой пространственной когерентности, а также описанию контринтуитивного эффекта сужения кольца конической рефракции при снижении когерентности излучения. В следующем разделе мы рассмотрим, как дальнейшее поле пучка конической рефракции зависит от когерентности падающего на кристалл излучения.

3.9. Дальнее поле конической рефракции частично когерентного излучения

Рассмотрим, как когерентность света влияет на формирование пятна Рамана вблизи оси распространения ($\rho \approx 0$) (Рис. 3.8а). Будем считать, что источник света неполяризованный, поэтому интенсивность пучка выражается через диагональные элементы матрицы КОУМ $W_{\mu\mu}(\mathbf{\rho}, \mathbf{\rho}, \xi)$, в соответствии с формулой (3.11). В результате,

мы можем интерпретировать функцию $W_{\mu\mu}(\mathbf{\rho}, \mathbf{\rho}, \xi)$, как интенсивность света с заданным ОУМ, равным $\hbar\mu$. Для вычисления элементов матрицы КОУМ в дальнем поле ($\xi > 1$) можно непосредственно использовать многомерный интеграл (3.14). Воспользуемся методом стационарной фазы, проинтегрировав (3.14) по всем радиальным переменным, получая:

$$W_{\mu\mu}(\mathbf{\rho}, \mathbf{\rho}, \xi) = \frac{\pi \rho_0^2}{2\xi^3} \frac{e^{-\frac{1}{1+2\Delta^2} \frac{\rho_0^2}{\xi^2}}}{(1+2\Delta^2)} \times \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} e^{i\mu(\theta_2 - \theta_1)} \exp \left[-\frac{(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1)^2}{2\theta_c^2} + i \frac{\rho_0}{\xi} (\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1) \mathbf{\rho} \right], \quad (3.71)$$

где $\mathbf{n}_{1,2} = [\cos(\theta_{1,2}), \sin(\theta_{1,2})]$ – вектора нормали, а $\theta_c = \xi(2+1/\Delta)^{1/2}/\rho_0$ – корреляционный угол. Чтобы понять физический смысл уравнения (3.71), заметим, что под знаком интеграла стоит произведение двух комплексных амплитуд плоских волн $\exp[-i\mathbf{k}_1 \mathbf{\rho}]$ и $\exp[i\mathbf{k}_2 \mathbf{\rho}]$, с волновыми векторами $\mathbf{k}_{1,2} = \rho_0 \mathbf{n}_{1,2}/\xi$. Усредняя данное произведение с весовой функцией $\exp[-(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1)^2/2\theta_c^2]$ по всем возможным направлениям, мы получаем искомые диагональные элементы матрицы КОУМ. Когда излучение когерентно ($\Delta \ll 1$), корреляционный угол $\theta_c \propto \Delta^{-1/2} \gg 1$. В результате весовая функция $\exp[-(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1)^2/2\theta_c^2] \approx 1$ и плоские волны в выражении (3.71) коррелируют друг с другом. В этом случае, интегралы по углам могут быть легко вычислены, и мы получим хорошо известное выражение [23], $W_{\mu\mu}(\mathbf{\rho}, \mathbf{\rho}, \xi) \propto J_\mu(\rho \rho_0/\xi)^2$, т.е. для когерентного света вблизи оси в дальнем поле пятно Рамана формируется из нескольких беселевых лучи с ОУМ $\hbar\mu$, где $\mu = 0, \pm 1$. Аналогичный результат также справедлив для света с низкой пространственной когерентностью ($\Delta \gg 1$) в области, где нормированная продольная координата больше нормированного радиуса кольца конической рефракции ($\xi > \rho_0$). Это связано с тем, что корреляционный угол в этой области также намного больше единицы ($\theta_c \propto \xi/\rho_0 > 1$), как и в случае когерентного света. Данное утверждение согласуется с теоремой Ван Циттерта–Цернике [26], согласно

которой поперечный радиус пространственной когерентности света увеличивается с удалением от источника.

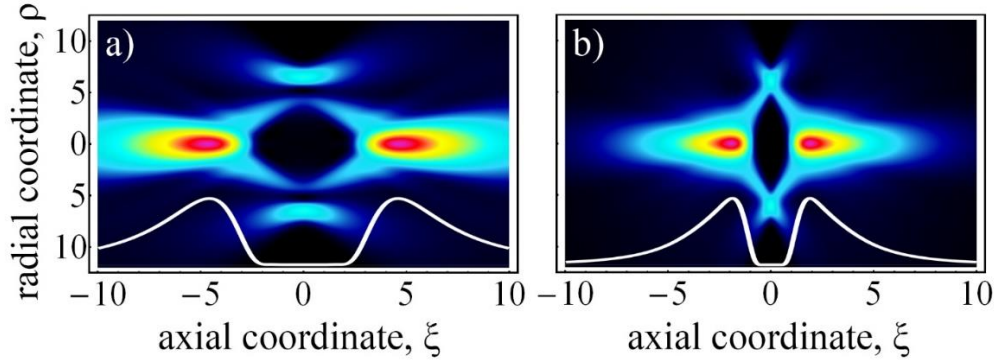


Рисунок 3.8 Пространственная эволюция распределения интенсивности пучка конической рефракции для (a) высоко- и (b) низкокогерентного света, с $\Delta=0$ и $\Delta=2$, соответственно. Численный расчет осуществлялся на основе модового разложения (3.22). Для наглядности внизу каждого рисунка показан профиль интенсивности вдоль оси распространения.

Однако, если продольная координата меньше радиуса кольца конической рефракции ($\xi < \rho_0$) и свет низкокогерентный, тогда корреляционный угол θ_c будет намного меньше единицы ($\theta_c \propto \xi/\rho_0 < 1$). В этом случае элементы матрицы КОУМ (3.71) легко вычисляются, и мы получаем следующее простое выражение для интенсивности конической рефракции низко-когерентного излучения (3.11):

$$I(\rho, \xi) = \frac{\sqrt{\pi} \rho_0}{2\Delta^2 \xi^2} \exp\left[-\frac{1}{2\Delta^2} \frac{\rho_0^2}{\xi^2}\right] \exp\left[-\frac{\rho^2}{2}\right] I_0\left(\frac{\rho^2}{2}\right), \quad (3.72)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя. В выражении (3.72) функция $\exp[-\rho_0^2/2\Delta^2\xi^2]/\xi^2$ отвечает за продольную пространственную эволюцию. Из нее несложно получить положение максимума интенсивности пучка, который находится в точке $\xi_{\max} = \rho_0/\Delta\sqrt{2}$. Так, уменьшение когерентности пучка, сопровождающееся увеличением параметра когерентности Δ , приводит к смещению пятен Рамана ближе к фокальной плоскости, как показано на Рис. 3.8b. Физику обнаруженного эффекта легко понять, если рассмотреть поперечный волновой вектор электрического поля падающего на кристалл, как случайную величину, согласно формуле

(3.26). Очевидно, что уменьшение когерентности (увеличение параметра когерентности Δ), приводит к увеличению характерного случайного волнового вектора пучка. В свою очередь, чем больше поперечный волновой вектор, тем больше угол схождения лучей, формирующих пятно Рамана вблизи оси распространения. В результате уменьшение когерентности света приводит к сближению пятен Рамана друг к другу.

Теперь перейдем к рассмотрению поперечного распределения интенсивности, которое задается функцией $\exp[-\rho^2/2]I_0(\rho^2/2)$ в выражении (3.72). Как легко убедиться, полуширина поперечного распределения интенсивности не зависит от продольной координаты ξ . Это означает, что пучок конической рефракции частично когерентного излучения распространяется в дальнем поле без дифракции. Данный эффект является крайне контринтуитивным, так как уменьшение когерентности гауссовского источника модели Шелла, наоборот, увеличивает дифракционную расходимость пучка в дальнем поле.

Для объяснения бездифракционного распространения пучка конической рефракции низкокогерентного излучения, мы предложили объяснение, основанное на многомодовой структуре низкокогерентного света. Разложим интенсивность конической рефракции частично когерентного света (3.72) по пучкам с более простой и понятной пространственной эволюцией:

$$I(\rho, \xi) \propto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(\rho\rho_0 / \xi)^2 \exp[-m^2 \xi^2 / \rho_0^2], \quad (3.73)$$

где каждый Бесселев пучок сам по себе испытывает дифракционное расширение. При этом, весовая функция задается экспонентой $\exp[-m^2 \xi^2 / \rho_0^2]$ и тоже зависит от продольной координаты ξ . Используя полученное разложение (3.73), легко оценить полуширину интенсивности пучка (3.73). Так, полуширина моды с индексом m на расстоянии ξ от фокальной плоскости пропорциональна $w \approx m\xi / \rho_0$, т. е. чем больше продольное расстояние ξ , или индекс моды m , тем больше полуширина Бесселева пучка. Однако число мод, участвующих в формировании интенсивности пучка

(3.73), ограничено весовой функцией $\exp[-m^2\xi^2/\rho_0^2]$ и равно $m_{\max}\approx\rho_0/\xi$. Таким образом, число мод будет уменьшаться с увеличением осевого расстояния ξ . Поэтому, подставляя индекс максимальной моды m_{\max} в полуширину моды w , получаем $w\propto 1$. Как и ожидалось, полуширина интенсивности пучка конической рефракции частично когерентного излучения не зависит от расстояния ξ , так как эффект дифракционного уширения компенсируется многомодовой структурой частично когерентного излучения.

Необходимо отметить, что данные результаты получены для гауссовского источника модели Шелла. Однако, можно ли обобщить их на более общий случай? Далее мы покажем, что бездифракционное распространение и сближение пятне Рамана при уменьшении когерентности справедливо для произвольного низко-когерентного источника, который описывается с помощью модели Шелла. Для этого, вернемся к определению элементов матрицы КОУМ (3.14), которые имеют физический смысл интенсивности света с заданным ОУМ, равным $\hbar\mu$. Для ее вычисления необходимо знать преобразование Фурье взаимной спектральной плотности излучения $\tilde{W}^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$. Ранее мы ограничивали себя случаем гауссовского источника модели Шелла (3.18), однако теперь рассмотрим более общий случай модели Шелла (3.17). Когда излучение низко когерентное, взаимную спектральную плотность (3.17) можно преобразовать к более простому виду:

$$W^{(0)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = I^{(0)}\left(\frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2}\right)g(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (3.74)$$

где мы воспользовались свойством, что пространственная степень когерентности $g(\mathbf{p})$ локализована на длине когерентности R_C , которая, в случае низкой-пространственной когерентности, много меньше, чем характерный масштаб w_0 для распределения интенсивности $I^{(0)}(\mathbf{p})=|\mathcal{E}^{(0)}(\mathbf{p})|^2$ (параметр когерентности $\Delta=w_0/R_C\gg 1$). Зная взаимную спектральную плотность (3.74) в прямом пространстве, найдем ее Фурье-образ, используя формулу (3.15):

$$\tilde{W}^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \tilde{I}^{(0)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \tilde{g}\left(\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2}\right), \quad (3.75)$$

где волнистой линией обозначается Фурье-образ функции. Подставим полученную функцию в интенсивность конической рефракции частично когерентного излучения с заданным ОУМ, равным $\hbar\mu$. В результате, после некоторых математических преобразований, подробно описанных в начале раздела, получим:

$$W_{\mu\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \xi) = \frac{\pi \rho_0^2}{2\xi^3} \tilde{g}\left(\frac{\rho_0}{\xi}\right) \times \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} e^{i\mu(\theta_2 - \theta_1)} \exp\left[i\frac{\rho_0}{\xi}(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1)\mathbf{p}\right] \tilde{I}^{(0)}\left(\frac{\rho_0}{\xi}(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1)\right). \quad (3.76)$$

Выразим формулу (3.76) через интенсивность источника в прямом пространстве:

$$W_{\mu\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \xi) = \frac{\pi \rho_0^2}{2\xi^3} \tilde{g}\left(\frac{\rho_0}{\xi}\right) \int \frac{d^2R}{2\pi} I^{(0)}(\mathbf{R}) J_\mu\left(\frac{\rho_0}{\xi}|\mathbf{p} - \mathbf{R}|\right)^2. \quad (3.77)$$

Проанализируем полученную формулу (3.77). Во-первых, ее можно условно разделить на произведение двух слагаемых, до и после знака интеграла. Выражение перед знаком интеграла определяет продольную пространственную эволюцию интенсивности излучения в дальнем поле, так как зависит только от продольной координаты ζ . Профиль интенсивности вдоль оси распространения задается Фурье-образом степени пространственной когерентности источника с аргументом, обратно пропорциональным продольному расстоянию. В свою очередь, выражение правее знака интеграла в (3.77) характеризует пространственную эволюцию поперечного распределения интенсивности и пропорционально интенсивности источника. В результате, продольная эволюция полностью определяется степенью пространственной когерентности источника и масштабом длины когерентности R_C , а поперечное распределение, наоборот, зависит от интенсивности источника и от связанного с интенсивностью характерного масштаба w_0 .

Обсудим, каким образом из выражения (3.77) возникает бездифракционная пространственная эволюция. Во-первых, дадим физическую интерпретацию для выражения (3.77). Для этого снова обратимся к виду взаимной спектральной плотности источника излучения (3.74). Так, в случае низкой пространственной когерентности можно считать, что пучок разбивается на пространственные области порядка длины когерентности. Каждая такая область когерентна относительно себя, но некогерентна по отношению к другим областям. При этом, каждая такая область будет создавать свое кольцо конической рефракции в фокальной плоскости, которое будет формировать пятно Рамана в дальнем поле. Причем, если область сдвинута относительно оси распространения на вектор \mathbf{R} , то кольцо и соответствующее пятно Рамана также будет сдвинуто на вектор \mathbf{R} . В результате, интенсивность конической рефракции в дальнем поле будет определяться интенсивностью индивидуального пятна Рамана, сдвинутого относительно оси распространения на вектор \mathbf{R} с весовым коэффициентом равным интенсивности источника в точке \mathbf{R} . При этом, чтобы получить конечную формулу, необходимо проинтегрировать по всем векторам \mathbf{R} . Данное рассуждение полностью объясняет форму поперечного распределения интенсивности в (3.77).

В результате, так как интенсивность в дальнем поле определяется сверткой интенсивности исходного пучка и интенсивности когерентного пятна Рамана, то возникает два характерных масштаба: перетяжка исходного пучка, которая не зависит от координаты, а также ширина когерентного пятна Рамана, которая линейно растет с расстоянием. Можно выделить два предельных случая. Очень далеко, где ширина когерентного пятна Рамана много больше перетяжки, каждое когерентное пятно Рамана лишь слегка сдвигается относительно оси распространения, и поэтому результирующая интенсивность определяется шириной когерентного пятна Рамана и расширяется за счет дифракции. Во втором предельном случае, когда ширина когерентного пятна Рамана много меньше перетяжки, некогерентное пятно содержит в себе большое число узких когерентных пятен Рамана. Они заполняют

собой пространственную область с шириной порядка перетяжки, которая не зависит от координаты. И в результате, пучок будет распространяться без дифракции. Если бы кристалла конической рефракции не было, то ширина когерентного пучка в дальнем поле всегда была бы больше перетяжки. Поэтому, можно сказать, что бездифракционное распространение возникает за счет интерференционной фокусировки в когерентный бесселев пучок, ширина которого может быть много меньше перетяжки пучка.

Исчезновение зависимости поперечного распределения интенсивности в области где возникает бездифракционное распространение пучка можно проследить напрямую из формулы (3.77). Используем факт, что характерный масштаб поперечного распределения интенсивности пятна когерентного Рамана, который задается квадратом функции Бесселя в формуле (3.77), много меньше, чем масштаб поперечного распределения интенсивности источника. Наивно можно предположить, что в аргументе интенсивности источника можно заменить переменную интегрирования \mathbf{R} на поперечный радиус вектор $\boldsymbol{\rho}$. Это позволит вынести интенсивность источника из под знака интеграла в выражении (3.77). Однако, оставшийся интеграл с квадратом функции Бесселя расходится на больших расстояниях. В результате, однозначно можно сказать, что форма поперечного распределения интенсивности не повторяет форму интенсивности источника излучения. Чтобы аккуратно обойти возникающую расходимость, заменим функцию Бесселя на ее асимптотику при больших значениях аргумента:

$$J_{\mu} \left(\frac{\rho_0}{\xi} |\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}| \right)^2 \approx \frac{\xi}{\pi \rho_0} \frac{1}{|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}|} \left(1 + (-1)^{\mu} \sin \left(2 \frac{\rho_0}{\xi} |\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}| \right) \right). \quad (3.78)$$

Далее мы пренебрежем осциллирующим вкладом. В результате, используя формулу (3.11) для неполяризованного света, получим выражение для интенсивности конической рефракции низкокогерентного излучения в дальнем поле:

$$I(\boldsymbol{\rho}, \xi) = \frac{\rho_0}{\xi^2} \tilde{g}\left(\frac{\rho_0}{\xi}\right) \int \frac{d^2 R}{2\pi} I^{(0)}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}) \frac{1}{|\mathbf{R}|}, \quad (3.79)$$

где мы произвели замену переменной интегрирования $\mathbf{R} \rightarrow -\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}$. Если подставить в полученную интенсивность излучения функции (3.18), соответствующие гауссовскому источнику модели Шелла, можно легко воспроизвести полученное ранее выражение (3.72).

Сдвиг пятен Рамана также можно объяснить аналогичным образом. Так как расстояние до пятна Рамана пропорционально перетяжке пучка, переход к некогерентному пучку уменьшает когерентную область до масштаба длины корреляций, что приводит к сближению пятен Рамана, так как область когерентности уменьшается и становится равна длине когерентности. В результате, изменение когерентности излучения дает возможность управлять пространственной эволюцией пучка.

3.10. Обсуждение результатов

На Рис. 3.7 представлены три основных эффекта в фокальной плоскости, связанные с конической рефракцией частично когерентного излучения. Во-первых, это исчезновение темного кольца Поггендорфа при уменьшении когерентности падающего на кристалл излучения, показанное на Рис. 3.7а. На графиках демонстрируется численно рассчитанные радиальные сечения интенсивности пучка конической рефракции для различных значений параметра когерентности. Из Рис. 3.7а хорошо видно, как двух-кольцевая структура, характерная для высококогерентного света, преобразуется в одно яркое кольцо при уменьшении когерентности исходного пучка. Объяснение данного эффекта связано с интерференционной природой двух-кольцевого распределения интенсивности в фокальной плоскости, которое образовано пересечением двух конусов конической рефракции, как показано на Рис. 1.8. Однако, учет частичной пространственной когерентности излучения значительно меняет ситуацию. Впервые явление исчезновения темного кольца Поггендорфа при уменьшении пространственной когерентности света было получено в эксперименте [A9], который обсуждался ранее. Для описания данного эффекта

нами была построена феноменологическая теория конической рефракции частично когерентного излучения. Центральное место в ней играет введённая степень пространственной когерентности конусов конической рефракции (3.41). Оказалось, что эта простая феноменологическая концепция описывает все существенные свойства обсуждаемого эффекта и дает хорошее согласие с экспериментом (Рис. 3.5). Однако, для более обстоятельного понимания особенностей, связанных с конической рефракцией частично когерентного излучения, необходимо было построить строгую теорию данного явления.

Чтобы восполнить пробел в понимании обсуждаемого эффекта, мы рассчитали зависимость степени когерентности конусов конической рефракции от параметра когерентности входного света, которая показана на Рис. 3.7b. Расчет был проведен с использованием численных и аналитических методов, при помощи строгого определения степени когерентности конусов (3.45). На Рис. 3.7b можно выделить две характерные области высокой ($\Delta \ll 1$) и низкой ($\Delta \gg 1$) пространственной когерентности. Когда свет обладает высокой когерентностью, соотношение между выходной и входной пространственной степенью когерентности имеет простой и элегантный вид (3.60). Данное соотношение было впервые получено из феноменологических принципов [A9], а затем обосновано в строгой теории [A6]. Для получения соотношения (3.60) и соответствующего ему физического смысла, мы описывали стохастическое электрическое поле источника с помощью случайной пространственно-неоднородной фазы (раздел 3.5). Для гауссовского источника модели Шелла, фаза источника излучения пропорциональна флуктуирующему поперечному волновому вектору, а амплитуда остается детерминированной величиной. Оказывается, что флуктуация фазы падающего на кристалл излучения порождает флуктуацию амплитуды поля конической рефракции, как показано на Рис. 3.2a-d. Из графика видно, что модуляции в заданной точке пространства имеют противоположный знак для различных конусов конической рефракции. Это означает, что флуктуации амплитуды существенно повлияют на интенсивность каждого из конусов конической рефракции, но взаимно сократятся при вычислении кросс-конусной

корреляционной функции. В результате, уменьшение когерентности падающего на кристалл излучения приведет к исчезновению темного кольца Поггендорффа, имеющего интерференционное происхождение.

Рассмотрим случай низкой пространственной когерентности. На Рис. 3.7b хорошо видно, что при уменьшении когерентности излучения степень когерентности конусов конической рефракции спадает по универсальному степенному закону (3.69) как функция длины когерентности. Таким образом, степень когерентности конусов конической рефракции не зависит от детального вида степени входной пространственной когерентности (вплоть до константы перед степенным законом). Чтобы получить данный степенной закон, мы вновь использовали представление флуктуирующей фазы электрического поля источника, но уже не считали, что флуктуации малы, как это было в случае высокой пространственной когерентности. В результате, электрическое поле конусов конической рефракции теперь описывается при помощи введенных в данной работе обобщенных асимметричных бессель-гауссовых пучков, которые зависят от случайного поперечного волнового вектора поля, падающего на кристалл. Нами было показано, что основной вклад в степень когерентности конусов конической рефракции вносит малая доля волновых векторов, площадь которых в \mathbf{q} -пространстве фиксирована и очень слабо зависит от формы степени когерентности источника. Отметим, что общая площадь, занимаемая волновыми векторами в \mathbf{q} -пространстве, которые присутствуют в частично когерентном пучке, увеличивается с уменьшением когерентности. Таким образом, чем меньше когерентность, тем меньше отношение площади \mathbf{q} -пространстве, занимаемой волновыми векторами вносящими вклад в степень когерентности конусов конической рефракции, к площади волновых векторов, которые присутствуют в частично когерентном пучке. Данное рассуждение полностью объясняет универсальную степенную зависимость степени когерентности конусов конической рефракции от длины когерентности падающего на кристалл излучения.

Третий эффект, обнаруженный в фокальной плоскости, показан на Рис. 3.7c и связан с трансформацией интенсивности конусов конической рефракции при

уменьшении когерентности источника. Удивительно, но полуширина кольца конической рефракции становится меньше при переходе от высоко- к низкокогерентному излучению. Данный факт легко понять, если рассмотреть когерентные и некогерентные пределы для полуширины кольца, показанные на Рис. 3.7d. В приближении высокой когерентности полуширина кольца больше, чем у падающего пучка, так как излучение за кристаллом имеет более сильную локализацию в Фурье пространстве. Для некогерентного излучения полуширина кольца совпадает с полушириной падающего на кристалл пучка (поскольку кольцо конической рефракции состоит из суперпозиции гауссовых пучков, центры которых случайно распределены вдоль кольца конической рефракции). В результате, можно наблюдать явное уменьшение FWHM кольца конической рефракции при уменьшении когерентности, как показано на Рис. 3.7d.

После обсуждения новых эффектов в фокальной плоскости, перейдем к рассмотрению дальнего поля конической рефракции частично когерентного излучения. На Рис. 3.8 показана рассчитанная пространственная эволюция пучка конической рефракции когерентного и низко-когерентного излучения. На рисунке сразу можно заметить два новых явления: (i) возникновение бездифракционного распространения в дальнем поле и (ii) сдвиг пятен Рамана, которому соответствует “сжатие” осевой эволюции пучка конической рефракции. Первый эффект обусловлен интерференционной фокусировкой излучения некогерентного источника. Второй эффект “сжатия” пространственной эволюции пучка при уменьшении когерентности легко объяснить следующим образом. Согласно представлению фазовых флуктуаций и бессель-гауссовой модели конической рефракции, частично когерентный пучок можно представить в виде суперпозиции по различным бессель-гауссовым пучкам. Каждый из этих пучков образует отдельное пятно Рамана на расстоянии обратно пропорциональном величине поперечного волнового вектора бессель-гауссова пучка. Общее распределение интенсивности частично когерентной конической рефракции получается в результате усреднения интенсивностей бессель-гауссовых пучков по случайным волновым векторам. Однако наибольший вклад в

результатирующее распределение интенсивности вносят волновые векторы, обратно пропорциональные длине когерентности. Таким образом, расстояние до наблюдаемого пятна Рамана будет пропорционально длине когерентности и будет смещаться в сторону фокальной плоскости с уменьшением когерентности.

3.11. Краткие итоги

- Построена строгая теория конической рефракции для излучения с частичной пространственной когерентностью. Развита методика численного расчета, использующая представление взаимной спектральной плотности источника излучения по когерентным модам. Получены аналитические результаты, благодаря использованию псевдо-модового разложения взаимной спектральной плотности (представление флуктуирующей фазы).
- Теоретически объяснен эффект исчезновения темного кольца Поггендорфа в фокальной плоскости, возникающий при уменьшении когерентности источника света. Показано, что флуктуация фазы электрического поля перед кристаллом порождает флуктуацию амплитуды поля после кристалла, что становится причиной разрушения интерференции между конусами конической рефракции. В результате, перед интерференционным слагаемым в интенсивности излучения возникает степень когерентности конусов конической рефракции, которая уменьшается от единицы до нуля при переходе от высоко- к низкокогерентному свету. В пределе высококогерентного света, степень когерентности конусов повторяет форму пространственной степени когерентности источника излучения, а в пределе низкокогерентного света, спадает по степенному закону, пропорционально квадрату длины когерентности. Кроме того, обнаружено и объяснено сужение перетяжки кольца конической рефракции при уменьшении когерентности источника излучения.
- В дальнем поле пучка возникает пространственная область, где свет распространяется без дифракции. Длина области бездифракционного распространения пропорциональна разности перетяжки пучка и длины когерентности. Константа

пропорциональности равна отношению радиуса кольца конической рефракции к длине волны, что позволяет создавать бездифракционные пучки с длиной распространения порядка нескольких миллиметров. Установлено, что некогерентное пятно Рамана, распространяющееся без дифракции в дальнем поле, возникает за счет некогерентной суперпозиции большого числа когерентных пятен Рамана, возникающих за счет интерференционной фокусировки. В результате суммирования по всем пучкам исчезает зависимость поперечного профиля интенсивности от продольной координаты. Также обнаружен эффект сближения пятен Рамана при уменьшении пространственной когерентности излучения. Показано, что в случае когерентного излучения длина между пятнами Рамана пропорциональна перетяжке пучка, а в случае низкокогерентного излучения уменьшается пропорционально корреляционной длине.

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты:

- 1) Показано, что коническая рефракция элегантных лаггерр-гауссовых мод может быть эффективно описана с помощью векторных обобщенных бессель-гауссовых пучков. Построенная модель имеет неинтегральный характер и справедлива во всех пространственных областях, включая фокальную плоскость и дальнее поле, где формируются пятна Рамана.
- 2) Объяснен переход классического двух кольцевого распределения интенсивности в фокальной плоскости в многокольцевое при увеличении модового индекса падающего на кристалл света. Также, предсказано сближение пятен Рамана в сторону фокальной плоскости и зависимость радиуса кольца конической рефракции от индекса моды.
- 3) Построенная неинтегральная модель конической рефракции применена к описанию конической рефракции обобщенных бессель-гауссовых пучков. Предсказаны и объяснены эффекты многокольцевой фокальной плоскости, сдвига плоскости Ллойда, инверсии пятен Рамана и предсказано формирование бутылочных пучков.
- 4) Построена строгая теория конической рефракции излучения с частичной пространственной когерентностью. Показано, что в случае гауссовского источника модели Шелла матрицу взаимных спектральных плотностей конической рефракции можно выразить через хорошо известные интегралы Бельского-Хапалюка-Берри. Кроме того, предполагая случайность фазы электрического поля входного пучка, переформулирована и значительно упрощена строгая теория конической рефракции.
- 5) Получены аналитические выражения для интенсивности конической рефракции гауссовского источника модели Шелла в фокальной плоскости и в дальнем поле. Объяснены и строго обоснованы ранее полученные экспериментальные результаты и предсказаны новые явления. К последним относятся контринтуитивный

эффект сужения ширины кольца конической рефракции, исчезновение темного кольца Поггендорфа в плоскости Ллойда и смещение пятен Рамана для низкокогерентного излучения, падающего на кристалл. Также предсказана универсальная степенная зависимость степени когерентности конусов конической рефракции от длины когерентности и бездифракционное распространение низкокогерентного пучка конической рефракции в дальнем поле.

Основные результаты диссертации изложены в публикациях:

- A1. V. Yu. Mylnikov, E. U. Rafailov, and G. S. Sokolovskii. Close relationship between Bessel-Gaussian and Conical Refraction beams // *Opt. Express* 28(23), 33900-33910 (2020).
- A2. G.S.Sokolovskii, V.Yu.Mylnikov, S.N.Losev, K.A.Fedorova, E.U.Rafailov. Conical refraction of a high-M2 laser beam // *Proc. of SPIE*, v. 10090, 100901R (2017).
- A3. V. Y. Mylnikov, E. U. Rafailov and G. S. Sokolovskii. Conical Refraction with Laguerre-Gaussian Beams: From Raman Spot to ‘Anti-Raman’ Doughnut Distribution // 2019 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference (CLEO/Europe-EQEC), Munich, Germany, 2019, pp. 1-1.
- A4. Valentin Yu. Mylnikov, Edik U. Rafailov, Grigorii S. Sokolovskii. Conical refraction with generalized Bessel-Gaussian beams // 2021 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference (CLEO/Europe-EQEC), Munich, Germany, 2021, pp. 1-1.
- A5. V. Y. Mylnikov, K. K. Soboloeva, E. U. Rafailov and G. S. Sokolovskii. Ray Transfer Matrix of Conically Refracting Crystal for Laser Cavity Analysis // 2018 International Conference Laser Optics (ICLO), St. Petersburg, 2018, p. 182.
- A6. V. Yu. Mylnikov, V.V. Dudelev, E.U. Rafailov, G.S. Sokolovskii. Partially coherent conical refraction promises new counter-intuitive phenomena // *Scientific Reports* 12, 16863 (2022).

- A7. V.Yu. Mylnikov, E.U. Rafailov, G.S. Sokolovskii. Conical refraction with Gaussian Schell-model sources // 2020 International Conference Laser Optics (ICLO), Saint Petersburg, 2020, pp. 1-1.
- A8. V.Yu. Mylnikov, E.U. Rafailov, G.S. Sokolovskii. Partially coherent conical refraction: Phase fluctuation and the Bessel-Gauss model // 2022 International Conference Laser Optics (ICLO), 2022, pp. 01-01.
- A9. V. Yu. Mylnikov, S. N. Losev, V. V. Dudelev, K. A. Fedorova, E. U. Rafailov, and G. S. Sokolovskii. Conical refraction with low-coherence light sources // Opt. Express 27(18), 25428-25435 (2019).

Я благодарен своему научному руководителю Г. С. Соколовскому за возможность погрузиться в современную область знаний на стыке теоретической физики и оптики, связанную с исследованием фундаментальных вопросов теории когерентности структурированного света. Работа под его руководством была для меня полезной и интересной.

Я признателен участникам Чайного семинаров ФТИ им. А.Ф. Иоффе. Обсуждение на них работ, вошедших в диссертацию, принесло мне большую пользу. Также я благодарен Н. С. Аверкиеву, М. М. Глазову, В. Ю. Качоровскому и С.А. Тарасенко за ценные замечания и полезные обсуждения.

Литература

1. Forbes A., de Oliveira M., Dennis M.R. Structured light // *Nat. Photonics*. 2021. Vol. 15, № 4. P. 253–262.
2. Turpin A. et al. Conical refraction: fundamentals and applications // *Laser Photon. Rev.* 2016. Vol. 10, № 5. P. 750–771.
3. Peet V., Zolotukhin D. Free-space evolution of focused Gaussian beams transformed by conical diffraction in a biaxial crystal // *Opt. Commun.* 2010. Vol. 283, № 15. P. 3011–3016.
4. Rosen S. et al. A sub wavelength localization scheme in optical imaging using conical diffraction // *Opt. Express*. 2013. Vol. 21, № 8. P. 10133.
5. Fallet C. et al. Conical diffraction as a versatile building block to implement new imaging modalities for superresolution in fluorescence microscopy // *Proc. SPIE*. 2014. Vol. 9169. P. 916905.
6. Hellström J. et al. Polarization-tunable Yb:KGW laser based on internal conical refraction // *Opt. Lett.* 2007. Vol. 32, № 19. P. 2783.
7. Abdolvand A. et al. Conical refraction Nd:KGd(WO₄)₂ laser // *Opt. Express*. 2010. Vol. 18, № 3. P. 2753.
8. O'Dwyer D.P. et al. Conical diffraction of linearly polarised light controls the angular position of a microscopic object // *Opt. Express*. 2010. Vol. 18, № 26. P. 27319.
9. McDougall C. et al. Flexible particle manipulation techniques with conical refraction-based optical tweezers // *Proc. SPIE*. SPIE, 2012. Vol. 8458. P. 845824.
10. Turpin A. et al. Polarization tailored novel vector beams based on conical refraction // *Opt. Express*. Optical Society of America, 2015. Vol. 23, № 5. P. 5704.
11. Sun X. et al. Unitary transformation in polarization of vector beams via biaxial cascade crystals // *J. Opt.* IOP Publishing, 2019. Vol. 22, № 2. P. 25602.
12. Turpin A. et al. Free-space optical polarization demultiplexing and multiplexing by means of conical refraction // *Opt. Lett.* OSA, 2012. Vol. 37, № 20. P. 4197–4199.
13. Sun X. et al. Generation of the periodically polarized structured light beams // *Opt. Express*. OSA, 2017. Vol. 25, № 18. P. 21460–21470.
14. Fallet C., Sirat G.Y. Achromatization of conical diffraction: application to the generation of a polychromatic optical vortex // *Opt. Lett.* OSA, 2016. Vol. 41, № 4. P. 769–772.
15. Peinado A. et al. Conical refraction as a tool for polarization metrology // *Opt. Lett.* The Optical Society, 2013. Vol. 38, № 20. P. 4100–4103.
16. Peinado A. et al. Optimization, tolerance analysis and implementation of a Stokes polarimeter based on the conical refraction phenomenon // *Opt. Express*. OSA, 2015. Vol. 23, № 5. P. 5636–5652.
17. Grant S.D., Reynolds S., Abdolvand A. Optical sensing of polarization using conical diffraction phenomenon // *J. Opt.* {IOP} Publishing, 2016. Vol. 18, № 2. P. 25609.
18. Berry M. V, Jeffrey M.R., Mansuripur M. Orbital and spin angular momentum in

- conical diffraction // *J. Opt. A Pure Appl. Opt.* IOP Publishing, 2005. Vol. 7, № 11. P. 685–690.
19. Peet V. Conical refraction and formation of multiring focal image with Laguerre–Gauss light beams // *Opt. Lett.* 2011. Vol. 36, № 15. P. 2913–2915.
 20. Peet V. Experimental study of internal conical refraction in a biaxial crystal with Laguerre–Gauss light beams // *J. Opt.* Institute of Physics Publishing, 2014. Vol. 16, № 7. P. 075702.
 21. Kroupa J. Second-harmonic conical refraction in GUHP // *J. Opt.* {IOP} Publishing, 2010. Vol. 12, № 4. P. 45706.
 22. Grant S.D. et al. On the frequency-doubled conically-refracted Gaussian beam // *Opt. Express. OSA*, 2014. Vol. 22, № 18. P. 21347–21353.
 23. Berry M. V. Conical diffraction asymptotics: fine structure of Poggendorff rings and axial spike // *J. Opt. A Pure Appl. Opt.* 2004. Vol. 6, № 4. P. 289–300.
 24. Sokolovskii G.S. et al. Conical Refraction: New observations and a dual cone model // *Opt. Express.* 2013. Vol. 21, № 9. P. 11125–11131.
 25. Peet V. Conical refraction and formation of multiring focal image with Laguerre–Gauss light beams // *Opt. Lett.* 2011. Vol. 36, № 15. P. 2913.
 26. Mandel L., Wolf E. *Optical Coherence and Quantum Optics.* Cambridge University, 1995. 233 p.
 27. Korotkova O., Gbur G. Unified matrix representation for spin and orbital angular momentum in partially coherent beams // *Phys. Rev. A.* American Physical Society, 2021. Vol. 103, № 2. P. 23529.
 28. Hamilton W.R. Third supplement to an essay on the theory of systems of rays // *Trans. R. Irish Acad.* V.17. *Trans. R. Irish Acad.*, 1833. Vol. 17. P. 1–144.
 29. Lloyd H. On the phenomena presented by light in its passage along the axes of biaxial crystals // *Phil. Mag.* 1833. Vol. 1. P. 112–120 and 207–210.
 30. Poggendorff J.C. Ueber die konische Refraction // *Ann. der Physic und Chemie*, Hrsg. zu Berlin. 1839. Vol. 48. P. 461–462.
 31. Beer A. Experimental intensity distribution of internal conical refraction // *Ann. Phys. Chem.* 1852. Vol. 161. P. 67.
 32. Haidinger W. Die konische Refraction am Diopsid, nebst Bemerkungen über einige Erscheinungen der konischen Refraction am Arragonit // *Phys. Chem.* 1855. Vol. 172. P. 469.
 33. Voigt W. Theoretical and experimental explanation of the optical behaviour of active crystals // *Phys. Chem.* 1905. Vol. 323. P. 645–694.
 34. Born M., Wolf E. *Principles of Optics.* Cambridge Univ. Press, 1999.
 35. Raman C. V. Conical refraction in biaxial crystals // *Nature.* 1921. Vol. 107. P. 747.
 36. Raman C. V., Rajagopalan V.S., Nedungadi K.T.M. The phenomena of conical refraction // *Nature.* 1941. Vol. 147. P. 268.
 37. Raman C. V., Rajagopalan V.S., Nedungadi K.T.M. Conical refraction in naphthalene crystals // *Proc. Indian Acad. Sci.* 1941. Vol. 14. P. 221–227.
 38. Lalor É. The Angular Spectrum Representation of Electromagnetic Fields in Crystals. I. Uniaxial Crystals // *J. Math. Phys.* 1972. Vol. 13, № 4. P. 437–443.

39. Lalor É. The Angular Spectrum Representation of Electromagnetic Fields in Crystals. II. Biaxial Crystals // *J. Math. Phys.* 1972. Vol. 13, № 4. P. 443–449.
40. Lalor É. An Analytical Approach to the Theory of Internal Conical Refraction // *J. Math. Phys.* 1972. Vol. 13, № 4. P. 449–454.
41. Perkal'skis B.S., Mikhailichenko Y.P. Demonstration of conical refraction // *Sov. Phys. J.* 1979. Vol. 22, № 8. P. 901–902.
42. Belskii A.M., Khapalyuk A.P. Internal conical refraction of bounded light beams in biaxial crystals *Opt. Spectrosc.* 44 436–9 // *Opt. Spectrosc.* 1978. Vol. 44. P. 436–439.
43. Féve J.P., Boulanger B., Marnier G. Experimental study of internal and external conical refractions in KTP // *Opt. Commun.* 1994. Vol. 105, № 3–4. P. 243–252.
44. Belsky A.M., Stepanov M.A. Internal conical refraction of coherent light beams // *Opt. Commun.* 1999. Vol. 167, № 1–6. P. 1–5.
45. Belsky A.M., Stepanov M.A. Internal conical refraction of light beams in biaxial gyrotropic crystals // *Opt. Commun.* 2002. Vol. 204, № 1–6. P. 1–6.
46. Belafhal A. Theoretical intensity distribution of internal conical refraction // *Opt. Commun.* 2000. Vol. 178, № 4–6. P. 257–265.
47. Kalkandjiev T.K., Bursukova M.A. Conical refraction: an experimental introduction / ed. Sheridan J.T., Wyrowski F. 2008. P. 69940B.
48. O'Dwyer D.P. et al. Optical trapping using cascade conical refraction of light // *Opt. Express.* 2012. Vol. 20, № 19. P. 21119.
49. Peet V. Variable two-crystal cascade for conical refraction // *Opt. Lett.* 2015. Vol. 40, № 10. P. 2405.
50. Phelan C.F. et al. Conical diffraction of a Gaussian beam with a two crystal cascade // *Opt. Express.* 2012. Vol. 20, № 12. P. 13201.
51. McDonald C. et al. Characterizing conical refraction optical tweezers // *Opt. Lett.* 2014. Vol. 39, № 23. P. 6691.
52. Zhan Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications // *Adv. Opt. Photonics.* 2009. Vol. 1, № 1. P. 1.
53. Wilcox K.G. et al. Laser with simultaneous Gaussian and conical refraction outputs // *Appl. Phys. B.* 2010. Vol. 99, № 4. P. 619–622.
54. Fallet C. et al. Conical diffraction as a versatile building block to implement new imaging modalities for superresolution in fluorescence microscopy. 2014. P. 916905.
55. Caron J. et al. Conical diffraction illumination opens the way for low phototoxicity super-resolution imaging // *Cell Adh. Migr.* 2014. Vol. 8, № 5. P. 430–439.
56. Belskii A.M., Khapalyuk A.P. Propagation of confined light beams along the beam axes (axes of single ray velocity) of biaxial crystals // *Opt. Spectrosc.* 1978. Vol. 44. P. 312–315.
57. Sokolovskii G.S. et al. Conical Refraction: New observations and a dual cone model // *Opt. Express.* 2013. Vol. 21, № 9. P. 11125.
58. Turpin A. et al. On the dual-cone nature of the conical refraction phenomenon // *Opt. Lett.* 2015. Vol. 40, № 8. P. 1639.

59. Birkl G., Fortágh J. Micro traps for quantum information processing and precision force sensing // *Laser Photonics Rev.* 2007. Vol. 1, № 1. P. 12–23.
60. Daly M., Sergides M., Nic Chormaic S. Optical trapping and manipulation of micrometer and submicrometer particles // *Laser Photon. Rev.* 2015. Vol. 9, № 3. P. 309–329.
61. Peinado A. et al. Conical refraction as a tool for polarization metrology // *Opt. Lett.* The Optical Society, 2013. Vol. 38, № 20. P. 4100.
62. Peinado A. et al. Interferometric characterization of the structured polarized light beam produced by the conical refraction phenomenon // *Opt. Express.* Optical Society of America, 2015. Vol. 23, № 14. P. 18080.
63. Grant S.D., Reynolds S., Abdolvand A. Optical sensing of polarization using conical diffraction phenomenon // *J. Opt. (United Kingdom).* Institute of Physics Publishing, 2016. Vol. 18, № 2.
64. Lizana A. et al. Implementation and performance of an in-line incomplete Stokes polarimeter based on a single biaxial crystal // *Appl. Opt.* The Optical Society, 2015. Vol. 54, № 29. P. 8758.
65. Phelan C.F. et al. Conical diffraction and Bessel beam formation with a high optical quality biaxial crystal // *Opt. Express.* Optical Society of America, 2009. Vol. 17, № 15. P. 12891.
66. O’Dwyer D.P. et al. The creation and annihilation of optical vortices using cascade conical diffraction // *Opt. Express.* The Optical Society, 2011. Vol. 19, № 3. P. 2580.
67. Siegman A.E. *Lasers.* University Science Books, 1986. 1283 p.
68. Gori F., Guattari G., Padovani C. Bessel-Gauss beams // *Opt. Commun.* North-Holland, 1987. Vol. 64, № 6. P. 491–495.
69. Durnin J. Exact solutions for nondiffracting beams I The scalar theory // *J. Opt. Soc. Am. A.* Optical Society of America, 1987. Vol. 4, № 4. P. 651.
70. Durnin J., Eberly J.H., Miceli J.J. Comparison of Bessel and Gaussian beams // *Opt. Lett.* Optical Society of America, 1988. Vol. 13, № 2. P. 79.
71. Bagini V. et al. Generalized Bessel-Gauss beams // *J. Mod. Opt.* 1996. Vol. 43, № 6. P. 1155–1166.
72. Peet V. Improving directivity of laser beams by employing the effect of conical refraction in biaxial crystals // *Opt. Express.* The Optical Society, 2010. Vol. 18, № 19. P. 19566–19573.
73. Gerrard A., Burch J.M. *Introduction to matrix methods in optics.* Dover, 1994. 355 p.
74. Collins S.A. Lens-System Diffraction Integral Written in Terms of Matrix Optics // *J. Opt. Soc. Am.* Optical Society of America, 1970. Vol. 60, № 9. P. 1168.
75. Schimpf D.N. et al. Generalizing higher-order Bessel-Gauss beams: analytical description and demonstration // *Opt. Express.* Optical Society of America, 2012. Vol. 20, № 24. P. 26852.
76. Zauderer E. Complex argument Hermite–Gaussian and Laguerre–Gaussian beams // *J. Opt. Soc. Am. A.* The Optical Society, 1986. Vol. 3, № 4. P. 465–469.

77. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series and Products // Mathematics of Computation. New York: Academic Press, 1981. 310 p.
78. Porras M.A., Borghi R., Santarsiero M. Relationship between elegant Laguerre–Gauss and Bessel–Gauss beams // J. Opt. Soc. Am. A. The Optical Society, 2001. Vol. 18, № 1. P. 177–183.
79. L. Y., Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series and Products. // Math. Comput. 1981. Vol. 36, № 153. P. 310.
80. Mylnikov V.Y., Sokolovskii G.S. Droplet quasi-Bessel beam generated with the round-tip axicon: Exact solutions for different axicon shapes // Optik (Stuttg). 2022. Vol. 268. P. 169797.
81. Minin O. V et al. In-plane subwavelength optical capsule for lab-on-a-chip nanotweezers // Opt. Lett. Optica Publishing Group, 2022. Vol. 47, № 4. P. 794–797.
82. Darcy R.T. et al. Conical diffraction intensity profiles generated using a top-hat input beam // Opt. Express. OSA, 2014. Vol. 22, № 9. P. 11290–11300.
83. Khilo N.A. Conical diffraction and transformation of Bessel beams in biaxial crystals // Opt. Commun. 2013. Vol. 286. P. 1–5.
84. Saad F., Belafhal A. Conical refraction with Bessel-Gaussian beam modulated by Bessel gratings using biaxial crystals // Optik (Stuttg). 2016. Vol. 127, № 22. P. 10868–10874.
85. Sokolovskii G.S. et al. Conical refraction of a high-M² laser beam // Proc. SPIE. SPIE, 2017. Vol. 10090. P. 100901R.
86. Turpin A. et al. Transformation of vector beams with radial and azimuthal polarizations in biaxial crystals // J. Opt. Soc. Am. A. OSA, 2015. Vol. 32, № 5. P. 1012–1016.
87. Dong Y. et al. Statistics properties of a cylindrical vector partially coherent beam // Opt. Express. OSA, 2011. Vol. 19, № 7. P. 5979–5992.
88. Liu X., Zeng J., Cai Y. Review on vortex beams with low spatial coherence // Adv. Phys. X. Taylor & Francis, 2019. Vol. 4, № 1. P. 1626766.
89. Peng D. et al. Optical coherence encryption with structured random light // PhotoniX. 2021. Vol. 2, № 1. P. 6.
90. Wang F. et al. Experimental study of the scintillation index of a radially polarized beam with controllable spatial coherence // Appl. Phys. Lett. American Institute of Physics, 2013. Vol. 103, № 9. P. 91102.
91. Chen Y., Wang F., Cai Y. Partially coherent light beam shaping via complex spatial coherence structure engineering // Adv. Phys. X. Taylor & Francis, 2022. Vol. 7, № 1. P. 2009742.
92. Turpin A. et al. On the dual-cone nature of the conical refraction phenomenon // Opt. Lett. 2015. Vol. 40, № 8. P. 1639–1642.
93. Belskii A.M., Khapalyuk A.P. Internal conical refraction of bounded light beams in biaxial crystals // Opt. Spectrosc. 1978. Vol. 44. P. 436–439.
94. Gori F., Santarsiero M. Twisted Gaussian Schell-model beams as series of partially coherent modified Bessel-Gauss beams // Opt. Lett. OSA, 2015. Vol. 40, № 7. P. 1587–1590.

95. Wolf E. New theory of partial coherence in the space--frequency domain. Part I: spectra and cross spectra of steady-state sources // J. Opt. Soc. Am. OSA, 1982. Vol. 72, № 3. P. 343–351.
96. Gori F., Santarsiero M. Devising genuine spatial correlation functions // Opt. Lett. OSA, 2007. Vol. 32, № 24. P. 3531–3533.
97. Tervo J., Setälä T., Friberg A.T. Phase correlations and optical coherence // Opt. Lett. OSA, 2012. Vol. 37, № 2. P. 151–153.
98. Wang F. et al. Three modal decompositions of Gaussian Schell-model sources: comparative analysis // Opt. Express. Optica Publishing Group, 2021. Vol. 29, № 19. P. 29676–29689.
99. Berry M. V., Jeffrey M.R. Conical diffraction complexified: dichroism and the transition to double refraction // J. Opt. A Pure Appl. Opt. {IOP} Publishing, 2006. Vol. 8, № 12. P. 1043–1051.
100. Turpin A. et al. Wave-vector and polarization dependence of conical refraction // Opt. Express. OSA, 2013. Vol. 21, № 4. P. 4503–4511.
101. Turpin A. et al. Light propagation in biaxial crystals // J. Opt. IOP Publishing, 2015. Vol. 17, № 6. P. 65603.
102. Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 1944.
103. Radożycki T. A concise and universal method for deriving arbitrary paraxial and d'Alembertian cylindrical Gaussian-type light modes // Opt. Laser Technol. 2022. Vol. 147. P. 107670.
104. Radożycki T. Properties of special hyperbolic Bessel-Gaussian optical beams // Phys. Rev. A. American Physical Society, 2021. Vol. 104, № 2. P. 23520.
105. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series and Products. New York: Academic Press, 1981. № 153. 310 p.
106. Kotlyar V. V, Kovalev A.A., Soifer V.A. Superpositions of asymmetrical Bessel beams // J. Opt. Soc. Am. A. OSA, 2015. Vol. 32, № 6. P. 1046–1052.
107. Kotlyar V. V, Kovalev A.A., Soifer V.A. Asymmetric Bessel modes // Opt. Lett. OSA, 2014. Vol. 39, № 8. P. 2395–2398.
108. Kotlyar V. V et al. Asymmetric Bessel-Gauss beams // J. Opt. Soc. Am. A. OSA, 2014. Vol. 31, № 9. P. 1977–1983.
109. Huang C., Zheng Y., Li H. Noncoaxial Bessel-Gauss beams // J. Opt. Soc. Am. A. OSA, 2016. Vol. 33, № 4. P. 508–512.
110. Saad F., Belafhal A. A detailed study of internal conical refraction phenomenon of Flattened Gaussian beams propagating in a biaxial crystal // Optik (Stuttg). 2017. Vol. 138. P. 145–152.